

# CONDUCCIONES FORZADAS: UNA CONTRIBUCIÓN TEÓRICA A LA DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMADA DE CHRISTIANSEN

## ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
Resumen / Resum / Summary .....	2
<b>1. Introducción.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Justificación de la función aproximada .....</b>	<b>4</b>
<b>3. Tubería de exudación que distribuye un gasto o caudal uniformemente repartido .....</b>	<b>13</b>
<b>4. Aproximación de funciones hidráulicas.....</b>	<b>16</b>
<b>5. Coeficiente de Christiansen generalizado .....</b>	<b>20</b>
<b>6. Cálculo práctico del coeficiente universal de Christiansen .....</b>	<b>23</b>
<b>7. Conclusiones .....</b>	<b>23</b>
<b>Nota técnica complementaria.....</b>	<b>24</b>
1. Continuación de la justificación matemática .....	24
2. Ajuste por regresión multilínea .....	28
3. Determinación analítica más exacta de la expresión aproximada. La función “zeta de Riemann” .....	29
4. Resumen de la metodología empleada .....	32
Referencias bibliográficas y fondos documentales.....	33
Relación de figuras / Relación de tablas .....	34

## RESUMEN

El cálculo de las pérdidas de carga en una tubería con distribución discreta del gasto, régimen permanente y uniforme, caudal constante por derivación y salidas equidistantes (conducción a presión con servicio en ruta), fue abordado y resuelto por *Christiansen* en el año 1942, para el caso en que la primera derivación estuviera situada a una distancia del extremo aguas arriba de la tubería igual al espaciamiento existente entre todas las derivaciones. Posteriormente, en 1957, *Jensen* y *Fratini* introdujeron la correspondiente modificación en el valor del coeficiente de *Christiansen* para el caso de que la primera salida se hallara a una distancia del comienzo del ramal (línea portagoteros o portaaspersores) igual a la mitad de su espaciamiento. Dichas circunstancias se vienen presentando, sistemáticamente, en el diseño de las redes de riego por aspersión y en los localizados de alta frecuencia (microaspersión, exudación y goteo). El ensayo original, de tipo académico e ingenieril, que se desarrolla a continuación, trata de la justificación matemática de la función aproximada de *Christiansen*, que constituye un tema de notable interés teórico y de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto.

**Palabras clave:** tubería, riego, aspersión, goteo, aproximación, caudal, salidas, servicio en ruta, pérdida de carga, fórmula.

## RESUM

El càlcul de les pèrdues de càrrega en una canonada amb distribució discreta de l'aigua, règim permanent i uniforme, cabal constant per derivació i sortides equidistants (conducció a pressió amb servei en ruta), fou estudiat i resolt per *Christiansen* l'any 1942, per al cas que la primera derivació es situés a una distància de l'extrem aigües amunt de la canonada igual a l'interval existent entre les mateixes derivacions. Posteriorment, al 1957, *Jensen* i *Fratini* introduïren la corresponent modificació en el valor del coeficient de *Christiansen* per al cas que la primera sortida es trobi a una distància de l'inici de la canonada (línia portagoters o portaaspersors) igual a la meitat d'aquell interval. Les esmentades circumstàncies es presenten, sistemàticament, en el disseny de les xarxes de reg per aspersió i en els localitzats d'alta freqüència (microaspersió, exsudació i degoteig). L'assaig original, de tipus acadèmic i enginyeril, que es desenvolupa a continuació, tracta de la justificació matemàtica de la funció aproximada de *Christiansen*, la qual cosa constitueix un tema de notable interès teòric i d'escassa o nul·la difusió en la bibliografia especialitzada existent al respecte.

**Paraules clau:** canonada, reg, aspersió, degoteig, aproximació, cabal, sortides, servei en ruta, pèrdua de càrrega, fórmula.

## SUMMARY / ABSTRACT

*The calculation of the load losses in a pipe with discrete distribution of the flow, permanent and uniform regime, constant flow per branch and equidistant outlets (pressure conduction with en-route service) was tackled and solved by Christiansen in 1942 for the case in which the first branch was located at a distance from the upstream end of the pipe equal to the spacing existing between all the branches. Subsequently, in 1957, Jensen and Fratini introduced the corresponding modification in the value of Christiansen's coefficient for the case in which the first outlet was located at a distance from the beginning of the branch (dripline or sprinkler line) equal to half its spacing. Such circumstances are systematically encountered in the design of sprinkler and high frequency localised irrigation networks (micro-sprinkler, exudation and drip). The original essay, of an academic and engineering nature presented below, deals with the mathematical justification of the approximate Christiansen function, which is a subject of considerable theoretical interest and of little or no diffusion in the existing specialised literature on the subject.*

**Key words:** pipeline, irrigation, sprinkling, dripping, approach, flow, exits, en-route service, pressure drop, formula.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el primer número de la revista *AGRÓNOMOS* del Colegio Oficial de Ingenieros Agrónomos de Levante (correspondiente al verano de 1989) se publicó una brillante colaboración del Dr. Teodoro Montalvo López, Catedrático de Hidráulica General y Agrícola (Departamento de Ingeniería Agroforestal de la Universidad Politécnica de Valencia) y a la sazón Director de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de la capital del Turia. Se abordaba allí, con claridad y profundidad encomiables, el problema de la generalización del coeficiente de Christiansen –empleado para el cálculo de las pérdidas hidráulicas de carga en una tubería con distribución discreta del gasto, caudal constante por derivación y salidas equidistantes– para cualquier valor de la relación:

$$r = \frac{l_0}{l}$$

y de los parámetros  $n_0$  y  $m$ , así como se possibilitaba el cálculo directo de las pérdidas de carga en una tubería de característica única formada por un tramo inicial de cualquier longitud, en régimen permanente y uniforme, y de un tramo final con distribución discreta de caudales y servicio en ruta. Estas circunstancias se vienen presentando, sistemáticamente, en el diseño de las redes de riego por aspersión y en los localizados de alta frecuencia (RLAF, microaspersión, exudación y goteo).

Tuve la oportunidad de ponerme en contacto, más recientemente, con el Dr. Montalvo, que me propuso el estudio o deducción matemática de la función aproximada de Christiansen, por tratarse de un tema de notable interés teórico y, al parecer, de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto. De hecho, según el profesor Montalvo (1989), el Departamento de Matemáticas de aquella Universidad lo había venido intentando infructuosamente hasta la fecha.

El ensayo o artículo que aquí se desarrolla constituye, pues, la justificación matemática (propuesta por quien suscribe) de la aproximación de la formulación de Christiansen, de fecundas aplicaciones en el diseño de las modernas instalaciones de riego a presión. Puede considerarse como continuación de los artículos publicados por este autor en la misma revista *AGRÓNOMOS* (nº: 2, Otoño-Invierno 1989/90) y en *INGINYERIA AGRONÒMICA* (nº: 1, Junio de 1990, del Colegio Oficial y la Asociación de Ingenieros Agrónomos de Cataluña).

## 2. JUSTIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMADA

Se presenta el caso general de una tubería con servicio en ruta, con  $n_0$  derivaciones de caudal constante, con un distanciamiento entre salidas  $l$  y encontrándose la primera derivación a una distancia  $l_0$  del origen de la conducción, según puede verse en la Figura 1:

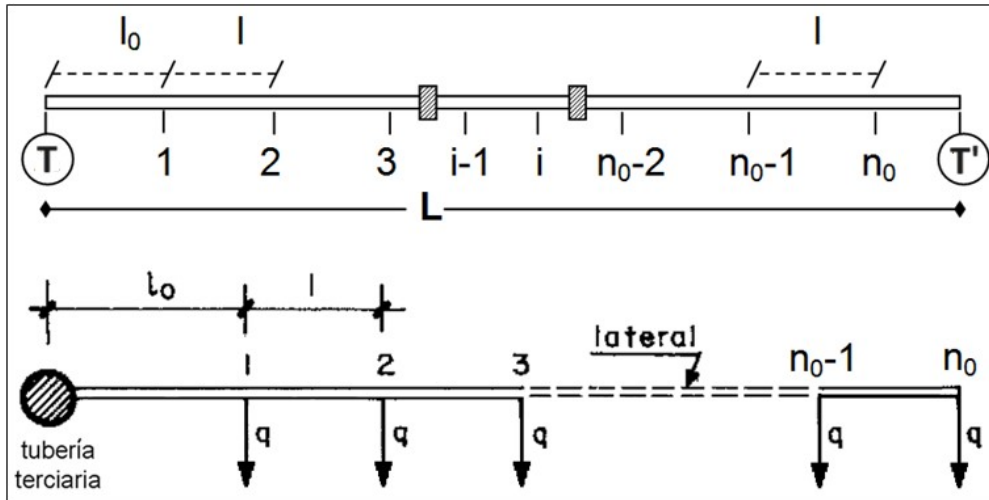


Fig. 1. Tubería con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal constante  $q$ .  
 en la que se cumplirá  $\forall l / l_1 = l_2 = \dots = l_i = \dots = l$ .

Pues bien, el caudal de salida de T, que se agota en T', será:

$$Q = n_0 \cdot q ,$$

y la longitud total de la conducción, teniendo en cuenta que:  $l_0 = r \cdot l$ , es:

$$L = l_0 + (n_0 - 1) \cdot l = (r + n_0 - 1) \cdot l$$

Teóricamente, en una tubería de las características expresadas, el coeficiente de reducción por salidas, aplicable a las pérdidas de carga continuas que experimenta una tubería que agota el caudal en su extremo final T' y mantiene constantes el caudal  $q$ , el diámetro interior, su rugosidad absoluta  $K$  y la equidistancia entre las salidas  $l$ , con  $l_0 = l$ , respondería a la expresión:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m ,$$

para la cual Christiansen (1942) obtuvo la función aproximada siguiente:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} , \text{ en la cual:}$$

$n_0$  = número de derivaciones o salidas.  
 $m$  = exponente de la fórmula utilizada en el cálculo hidráulico de las pérdidas de carga.

Así pues, normalmente se considera una tubería con salidas múltiples cuando ésta tiene las salidas igualmente espaciadas y, además, en cada una de ellas, se requiere extraer el mismo caudal (Martínez, 1991). Cabe aclarar que este

tipo de tuberías puede conformarse de un solo diámetro o de varios en función del caudal transportado, mediante los conos reductores correspondientes.

Las tuberías con salidas múltiples son un componente que es muy frecuente encontrar en el diseño y análisis de los sistemas de riego presurizado; por ejemplo, en las tuberías de las líneas laterales de los sistemas de aspersión convencional (fijos, semi-fijos o portátiles), de la aspersión de movimiento intermitente (*side roll*, *power roll* o lateral con ruedas, ...) y de la aspersión de movimiento continuo (avance frontal, pivote central); en líneas regantes y distribuidoras del riego localizado de alta frecuencia (goteo puntual, cinta de riego, microaspersión) y las tuberías con multicompuertas para el riego por gravedad (Ángeles *et al.*, 2007).

Como se puede ver, estas tuberías comúnmente se encuentran al final de los sistemas de riego presurizados, y son básicamente las encargadas de aplicar el agua directamente al cultivo, ya sea herbáceo, arbustivo o arbóreo. Esto hace que sea muy importante, en la previa etapa de diseño, el cálculo de la pérdida de carga por fricción con las paredes de la conducción. En este tipo de flujo, a medida que el agua avanza en la tubería, el gasto en el tubo se va reduciendo, resultando una pérdida por fricción menor en los tramos finales del tubo habida cuenta de la disminución de la velocidad (CONAGUA, 2002).

El problema que aquí se plantea constituye una generalización del problema clásico de una tubería sencilla con varias tomas intermedias (de número no excesivo) y diámetro constante, cuya resolución suele presentarse por aplicación de la conocida fórmula de Darcy y Bazin (1865) aunque también puede aplicarse la formulación que se propone por este autor (Franquet, 2005), y la determinación previa de la línea de niveles piezométricos<sup>1</sup>.

En el caso concreto de tratarse de derivaciones equidistantes y caudal constante  $q$  por cada una de ellas, la determinación de dicha línea piezométrica de obtendría dividiendo la carga total  $h$  en partes proporcionales a la sucesión de números reales:  $n_0^2$ ,  $(n_0 - 1)^2$ , ..., 1.

Pues bien, vamos a tratar, aquí, de explicar o justificar matemáticamente la que denominaremos "aproximación de Christiansen", basándonos, inicialmente, en el concepto clásico de "suma integral".

En efecto, veamos que la expresión: 
$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n_0^m = H_{n_0}^{(-m)},$$

que es un número armónico generalizado con exponente negativo, y representa la suma o adición de las áreas de los rectángulos yuxtapuestos de alturas: 1,  $2^m$ ,  $3^m$ ,  $4^m$ ,  $5^m$ , ..., y de base igual a la unidad. Véase la Fig. 2:

---

<sup>1</sup> La "línea piezométrica" se corresponde con el lugar geométrico de los niveles de agua de los tubos piezométricos o piezómetros conectados a la tubería y es la suma de las alturas de presión y de posición o cota taquimétrica. La diferencia de altura existente entre la línea de energía y la línea horizontal o plano de carga representa la pérdida de carga total por rozamiento existente entre dos puntos cualesquiera de la conducción en estudio.

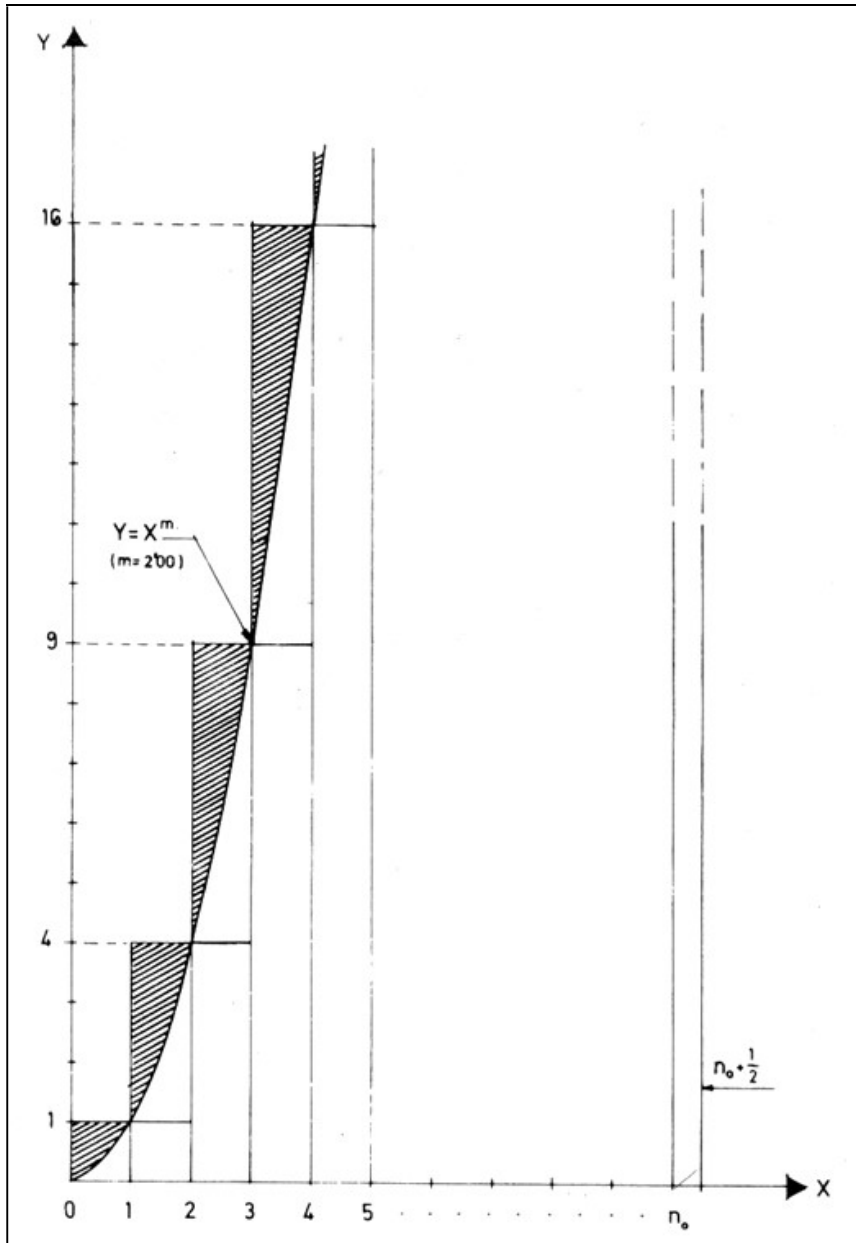



Fig. 2. Representación gráfica para  $m = 2.00$ .

Tal como se puede ver en la Figura 2 (realizada, v.gr., para  $m = 2.00$ ), la curva o función potencial  $y = x^m$ , comprende, entre ella y el eje de abscisas OX, un área que difiere de la buscada en aproximadamente la mitad del área del rectángulo mayor, ya que, efectivamente, la zona representada en la figura anterior por , puede considerarse equivalente a la mitad de la superficie de este rectángulo.

Asimismo, se obtendrá una buena aproximación a esta determinación tomando para la expresión:  $\sum_{i=1}^{n_0} i^m$ , el área existente bajo la curva y sobre el eje de abscisas, pero entre los límites u ordenadas extremas:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = n_0 + \frac{1}{2}$$

por la aplicación del propio concepto de integral definida. El límite superior se incrementará en  $\frac{1}{2}$  para así obtener, precisamente, la mitad de la superficie del rectángulo mayor, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = \int_0^{n_0 + \frac{1}{2}} x^m dx = \left[ \frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{n_0 + \frac{1}{2}} = \frac{(n_0 + \frac{1}{2})^{m+1}}{m+1} = \frac{n_0^{m+1} \left(1 + \frac{1}{2n_0}\right)^{m+1}}{m+1}$$

Ahora bien, se cumple que:

$$\left(1 + \frac{1}{2n_0}\right)^{m+1} = 1 + (m+1) \cdot \frac{1}{2n_0} + \frac{(m+1) \cdot m}{2} \cdot \frac{1}{4n_0^2} + \dots$$

por la fórmula clásica del desarrollo del binomio de Newton-Tartaglia. Los términos que no aparecen son de tercer grado y sucesivos en  $\frac{1}{n_0}$  y se pueden despreciar, a efectos prácticos, teniendo en cuenta su bajísima magnitud cuando el número de derivaciones o salidas  $n_0$  resulta suficientemente elevado, tal y como acostumbra a suceder en la realidad.

Así pues, el coeficiente experimental de reducción por salidas, anteriormente definido, tomará el valor:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m = \frac{n_0^{m+1} \left[ 1 + (m+1) \cdot \frac{1}{2n_0} + \frac{(m+1) \cdot m}{2} \cdot \frac{1}{4n_0^2} \right]}{n_0^{m+1} \cdot (m+1)} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2n_0} + \frac{m}{8n_0^2}$$

Con todo esto, ya hemos obtenido los dos primeros términos o sumandos fraccionarios de la fórmula aproximada, cuya deducción es objeto de nuestro estudio, a saber:

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2n_0}.$$

Ahora bien, el tercero de ellos:  $\frac{m}{8n_0^2}$  no coincide con el  $\frac{\sqrt{m-1}}{6n_0^2}$ , que encontraremos en esta fórmula. Sin duda, esto es debido a que este tercer término ha estado cambiado o alterado expresamente (lo cual resultaría lícito ya que, en definitiva, nos encontramos ante un proceso de aproximación funcional, ver posterior epígrafe 4) con el único objetivo de que la fórmula resulte válida para los siguientes casos particulares:  $m = 1, 2, 3$ .

Veamos, a continuación, lo que sucede en cada uno de ellos:

**Para  $m = 1$** , se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i = \frac{n_0(n_0 + 1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n_0,$$



ya que se trata de la suma de los  $n_0$  primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad. Así:

$$F = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2n_0^2} = \frac{n_0 + 1}{2n_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n_0}$$

En este nivel, hay que cambiar el término  $\frac{m}{8n_0^2}$  por otro como, por ejemplo,  $\frac{m-1}{8n_0^2}$ , para que se obtenga 0 cuando  $m = 1$ .

**Para  $m = 2$** , se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^2 = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1) \cdot (2n_0 + 1)}{6} = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n_0^2$$

En efecto, esto puede demostrarse por inducción, ya que la igualdad anterior se cumple, evidentemente, para  $n_0 = 1$ , puesto que:

$$\frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

Supongamos, también, que resulta cierta para  $n_0$ . Entonces, se tendrá:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n_0^2 = n_0 \cdot (n_0 + 1) \cdot (2n_0 + 1) / 6$ , y sumando  $(n_0 + 1)^2$  a los dos miembros de la anterior expresión, resultará lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n_0^2 + (n_0 + 1)^2 &= \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1) \cdot (2n_0 + 1)}{6} + (n_0 + 1)^2 = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot [n_0 \cdot (2n_0 + 1) + 6 \cdot (n_0 + 1)]}{6} = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot [n_0 \cdot (2n_0 + 3) + 4n_0 + 6]}{6} = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot [n_0 \cdot (2n_0 + 3) + 2(2n_0 + 3)]}{6} = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot (n_0 + 2) \cdot (2n_0 + 3)}{6} \end{aligned}$$

Así pues, la igualdad es cierta para  $(n_0 + 1)$ , tal y como pretendíamos demostrar. Entonces, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = \frac{(n_0 + 1) \cdot (2n_0 + 1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2 + 3n_0 + 1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{6n_0^2}$$

En este nivel, hay que cambiar el término  $\frac{m-1}{8n_0^2}$  por otro, como por ejemplo el  $\frac{m-1}{6n_0^2}$ , para que adopte el valor 0 cuando  $m = 1$ , y además valga  $\frac{1}{6n_0^2}$ , cuando  $m = 2$ .

**Para  $m = 3$** , se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^3 = \frac{n_0^2 (n_0 + 1)^2}{4} = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0^3;$$

en efecto, al igual que en el caso anterior, veamos que esta identidad se cumple para:  $n_0 = 1$ . Siguiendo el mismo método de inducción, supongámosla también cierta para  $n_0$ .

Entonces, se cumplirá que:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2$ , y sumando  $(n_0 + 1)^3$  a los dos miembros de la igualdad, con lo cual ésta no varía, resultará:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0^3 + (n_0 + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2 + (n_0 + 1) \cdot (n_0 + 1)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2 + n_0 (n_0 + 1)^2 + (n_0 + 1)^2.$$

Pero, según hemos visto en el primer caso (para  $m = 1$ ), se cumple que:

$$n_0(n_0 + 1) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n_0),$$

con lo que, también tendremos que:

$$n_0 (n_0 + 1)^2 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n_0) \cdot (n_0 + 1), \text{ y por tanto:}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0 + (n_0 + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2 + 2 (1 + 2 + 3 + \dots + n_0) \cdot (n_0 + 1) + (n_0 + 1)^2 = [1 + 2 + 3 + \dots + n_0 + (n_0 + 1)]^2,$$

lo que prueba que la igualdad es cierta para  $(n_0 + 1)$ , tal y como pretendíamos demostrar.

Así pues, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = \frac{1}{n_0^4} \cdot \frac{n_0^2 (n_0 + 1)^2}{4} = \frac{n_0^4 + 2n_0^3 + n_0^2}{4n_0^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{4n_0^2}$$

En este nivel, hay que cambiar el término  $\frac{m-1}{6n_0^2}$  por otro que continúe valiendo

0 para  $m = 1$ , que valga  $\frac{1}{6n_0^2}$ , para  $m = 2$  y que valga  $\frac{1}{4n_0^2}$ , cuando resulte un  $m = 3$ . En el mismo orden de ideas, veamos que resulta útil su substitución por

el término  $\frac{\sqrt{m-1}}{6n_0^2}$ , ya que esta última expresión vale 0 para  $m = 1$ , vale  $\frac{1}{6n_0^2}$

para  $m = 2$ , y, para  $m = 3$  no vale  $\frac{1}{4n_0^2}$  en sentido estricto, pero sí toma un

valor próximo que es:  $\frac{\sqrt{2}}{6n_0^2}$ , y,  $\frac{\sqrt{2}}{6} = 0.2357022$  resulta aproximadamente igual a:

$1/4 = 0.2500000$  (concretamente, el primer valor es un 94.28% del segundo), lo que satisface plenamente, de hecho, nuestras exigencias prácticas.

Siendo la fórmula anteriormente obtenida válida para los valores del exponente  $m = 1$ ,  $m = 2$ ,  $m = 3$ , o sea:  $m \in (1, 2, 3)$ , resultará además válida para los números reales no enteros del tipo:  $m \in [1, 4]$ , esto es: 1. ..., 2. ..., 3. ..., y también, aunque con menor grado de aproximación, para los valores supuestos: 4. ..., 5. ..., etc., que pudiera adoptar el coeficiente utilizado en la fórmula empleada en el cálculo de las pérdidas de carga de la conducción, según los diferentes casos.

Veamos, al respecto de los diferentes valores que puede tomar el coeficiente **m**, que, en general, las pérdidas unitarias de carga de una tubería a presión o conducción forzada, en función del caudal por ella circulante, responden a una expresión potencial del tipo:

$$J = n \cdot Q^m$$

que, en el caso de la expresión simplificada de Darcy (1865), adopta el valor corriente:  $m = 2.00$ , así como en las de Lèvy (1899), Gaukler, Weisbach (1843), Kütter (1870), Mognie, Chèzy, Sonier, Manning-Strickler (1923) o Catani. En las de la sociedad SOGREAH (1962), Flamant o Blasius es  $m = 1.75$ , así como en las de Saph y Schoder; en la de Scimemi-Veronese, es  $m = 1.78571$ , en la usual conocida de Hazen-Williams es  $m = 1.852$ , en las de Biegeleisen y Boukowsky es  $m = 1.90$ , así como en la de Meyer-Peter, mientras que en las diversas formulaciones propuestas por Scobey encontramos los valores:  $m = 1.80$ ,  $1.90$ , etc., pero siempre dentro del intervalo de existencia al que nos hemos referido, y expresándolas, todas ellas, como fórmulas potenciales monomias.

La versatilidad de tan amplia formulación induce a concluir que en tal información están incluidos los diferentes estilos de trabajo sucesivamente empleados a lo largo de casi dos centurias y representativos, en el fondo, de una evolución de los conocimientos que tienden a generalizar y unificar, cada vez más, sus afirmaciones, en la prosecución de una síntesis final aún no alcanzada. En este mismo sentido, nosotros hemos realizado un esfuerzo en el cálculo de las conducciones libres, que puede hallarse en otros trabajos (Franquet, 2005).

Resulta ineludible, hoy en día, distinguir con arreglo a la experimentación de Von Kármán-Nikuradse y de Colebrook-White, las tuberías lisas, rugosas e intermedias, denominaciones éstas establecidas no en función de la contextura

de la pared, sino según el comportamiento hidráulico, por virtud de la configuración de la capa límite que se halla perfectamente definida en cada caso. Sucede, de este modo, que la ley de resistencia en las tuberías lisas es única, independiente de su material constitutivo y expresable por una ley analítica de la que la fórmula de Blasius es una primera aproximación que ha sido prolongada por otros investigadores.

Así pues, resultará, en definitiva:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2}$$

**tal y como se quería demostrar, que es la expresión aproximada adoptada por Christiansen en su estudio acerca de las conducciones hidráulicas con servicio en ruta.**

Conviene tener presente, asimismo, que esta fórmula sólo resultará válida para el caso concreto en el cual la primera salida se encuentre del principio de la conducción a una distancia  $l_0 = l$  ( $r = 1$ ).

Es obvio, por otra parte, que cuando el número de derivaciones o salidas aumenta indefinidamente (o sea, cuando el caudal se reparte a lo largo de toda la conducción forzada, como en el caso del riego por cinta exudante o subterráneo), la expresión anterior se convertirá en:

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} F = \frac{1}{1+m},$$

que constituye, en estas circunstancias, el valor mínimo al cual tiende el coeficiente experimental de reducción que nos ocupa.

Si el caudal residual o extremal de la conducción es nulo, y considerando el caso normal  $m = 2.00$ , veamos que ello nos indica que la pérdida de carga que tiene lugar es la tercera parte de la que se produciría si el gasto o caudal inicial recorriera toda la tubería y saliera libremente por el extremo de la misma (y ello considerando que la tubería en cuestión distribuye un gasto uniformemente repartido que se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la conducción).

Normalmente, en los RLAF (riegos localizados de alta frecuencia) se cumplirá que  $m = 1.75$ , mientras que cuando el régimen es laminar, situación ésta frecuente en el riego por exudación en que la pérdida de carga es, prácticamente, continua y no discreta, se tendrá que con:  $m = 1.00$  y  $F = 0.500$  y con  $m = 2.00$  se tiene  $F = 0.333$ .

El estudio más preciso de este caso se desarrolla, precisamente, en el epígrafe siguiente del presente Artículo.

### 3. TUBERÍA DE EXUDACIÓN QUE DISTRIBUYE UN GASTO O CAUDAL UNIFORMEMENTE REPARTIDO

Sea una tubería OB de longitud  $l$  y diámetro  $D$ , que tiene su origen en un grupo de bombeo o bien en un depósito de agua elevado como el de la Figura 3, con varias tomas laterales uniformemente espaciadas, por las cuales se derivan gastos idénticos. A saber:

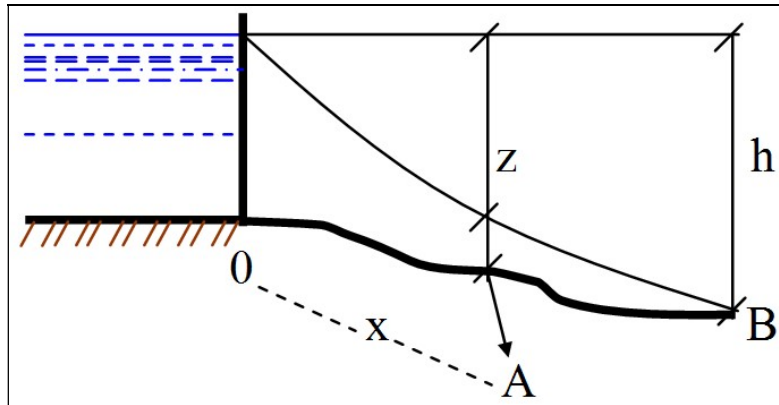


Fig. 3. Tubería saliente de un depósito con tomas de idéntico caudal.

Cuando en una conducción de estas características, es suficientemente grande el número de derivaciones (típico, v. gr, en los sistemas de riego por aspersión y localizados de alta frecuencia, como la microaspersión, la exudación y el goteo en sus diferentes modalidades), se efectúa el cálculo, con gran aproximación, suponiendo que se distribuye un gasto uniformemente repartido a lo largo del trayecto, el cual se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la tubería o distancia:  $l = OB$ . A este gasto así obtenido, se le denomina gasto por unidad de longitud de tubería.

En estos casos, puede asimilarse el movimiento del agua por la tubería a una sucesión de movimientos uniformes infinitesimales de ley variable con el caudal -o bien con la sección de la conducción si ésta no es constante- debido a la proximidad de los cambios y a la pequeña variación del caudal que tiene lugar como consecuencia de ellos. Si bien sería preciso, para la intachable resolución del problema, el conocimiento exacto de dicha ley de variación del caudal, podríamos admitir, con buena aproximación, que el servicio en el trayecto se reparte uniformemente en toda la longitud de la tubería, disminuyendo el caudal en una cierta cantidad  $q$  por unidad de longitud de la tubería. **Es decir, que se gasta o consume un caudal  $q$  por unidad de longitud de la conducción** (Torres, 1970).

Utilizando, ahora, la siguiente notación:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = \text{gasto en el origen O de la tubería.} \\ q = \text{gasto derivado por unidad de longitud de tubería.} \\ Q = \text{gasto disponible en un punto genérico A, situado a una distancia} \\ \text{del origen } OA = x . \end{array} \right.$$

evidentemente se verificará que:

$$Q = Q_0 - q \cdot x \quad (1)$$

siendo  $q \cdot x$  el gasto distribuido en el trayecto OA.

Si expresamos la pérdida de carga continua por rozamiento en el tramo OA, mediante la fórmula:

$$z = n \int_0^x Q^2 \cdot dx = n \int_0^x (Q_0 - qx)^2 \cdot dx = n \int_0^x (Q_0^2 - 2qx \cdot Q_0 + q^2 \cdot x^2) \cdot dx.$$

La constante de integración es nula, pues para  $x = 0$ , también:  $z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 0$ ; o sea:

$$z = n(Q_0^2 \cdot x - q \cdot Q_0 \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot x^3) = n \left[ (Q_0 + q \cdot x)^2 \cdot x - q(Q_0 + q \cdot x)x^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot x^3 \right]$$

$$z = n(Q^2 \cdot x + Q \cdot q \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot x^3) \quad (2)$$

que es la ecuación de una parábola cúbica o función representativa de la línea de niveles piezométricos.

Si llamamos  $Q_e$  al caudal residual o extremal que sale por el extremo B de la tubería tendremos, según la ecuación (2), se tendrá la pérdida continua total de carga siguiente:

$$h = n(Q_e^2 \cdot l + Q_e \cdot q \cdot l^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot l^3) \quad (3)$$

Ahora bien, si el extremo B de la tubería es un punto muerto, o sea, si todo el caudal se deriva a lo largo de la conducción sin que al punto B llegue ya caudal residual alguno, se tendrá evidentemente que:

$$Q_e = 0, \text{ y por tanto, en (1) se tendrá: } Q_0 = q \cdot l,$$

y substituyendo estos valores en la ecuación (3), obtendremos:

$$h = \frac{1}{3} \cdot n \cdot q^2 \cdot l^3 = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (q \cdot l)^2 \cdot l = 0.333 \cdot n \cdot Q_0^2 \cdot l \quad (4)$$

expresión que nos indica que la pérdida de carga continua es la tercera parte de la que se produciría si el gasto  $Q_0$  recorriera toda la tubería y saliera libremente por el extremo B de la misma, tal como ya se ha enunciado en el epígrafe anterior. Ello equivaldría, pues, a un coeficiente reductor de Christiansen  $F = 0.333$ , cuando  $n_0$  tiende a  $\infty$  y  $m = 2.00$ .

La ecuación anterior (4) también puede expresarse así:

$$h = \frac{1}{3} \cdot n \cdot Q_0^2 \cdot l = n \cdot Q'^2 \cdot l, \text{ de donde resulta:}$$

$$Q' = \frac{Q_0}{\sqrt{3}} = 0.577 \cdot Q_0 \quad (5)$$

lo que significa que la pérdida de carga continua es equivalente a la que se produciría si por la tubería circulara un gasto constante e igual a:

$$\frac{Q_0}{\sqrt{3}} = 0.577 \cdot Q_0 .$$

Estudiaremos, a continuación, el procedimiento que se utiliza para determinar el diámetro conveniente, para que la tubería pueda distribuir el gasto uniformemente repartido en la forma anteriormente indicada.

La ecuación (3) equivale a la formulación:

$$h = n(Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3}q^2 \cdot l^2) \cdot l = n \cdot Q_1^2 \cdot l = J_1 \cdot l ;$$

introduciendo un “caudal ficticio”  $Q_1$  que al circular por la tubería de manera constante produzca una pérdida de carga continua **h**.

$$Q_1^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3}q^2 \cdot l^2 \quad (6)$$

pero si tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} (Q_e + \frac{1}{2}q \cdot l)^2 &= Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{4}q^2 \cdot l^2 < Q_1^2 \\ (Q_e + \frac{1}{\sqrt{3}}q \cdot l)^2 &= Q_e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3}q^2 \cdot l^2 > Q_1^2 \end{aligned}$$

resulta el valor de  $Q_1$  acotado entre los límites:

$$Q_e + \frac{1}{2}q \cdot l < Q_1 < Q_e + \frac{1}{\sqrt{3}}q \cdot l , \text{ o lo que es igual:}$$

$$Q_e + 0.5 \cdot q \cdot l < Q_1 < Q_e + 0.577 \cdot q \cdot l ,$$

**luego puede tomarse con suficiente aproximación, como valor de  $Q_1$ , para el cálculo del diámetro interior de la conducción:**

$$Q_1 = Q_e + 0.55 q \cdot l$$

, que es la fórmula que se emplea usualmente para el diseño de las redes de abastecimiento de agua agrícola, industrial y doméstica (Torres, 1970).

Conociendo ya los valores de  $Q_1$  y  $J = h/l$ , se halla fácilmente el valor de  $D$  y  $S$ .

Si al punto B no llegara ningún caudal (con lo que:  $Q_e = 0$ ), se tomará, según hemos demostrado, como valor de  $Q_1$  de la expresión (6):

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot q \cdot l \quad ; \quad \text{o lo que es lo mismo:}$$

$$Q_1 = 0.577 \cdot q \cdot l \approx 58\% \text{ de } Q_0$$

#### 4. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES HIDRÁULICAS

La expresión general teórica que Christiansen trató de simplificar, correspondiente al coeficiente de reducción por  $n_0$  salidas o derivaciones, tal como se ha visto en los expositivos anteriores, viene dada por la formulación siguiente, para un exponente de la velocidad del agua  $m$  dado:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m = f(n_0)$$

para la cual Christiansen (1942), como hemos visto, obtuvo la función aproximada siguiente:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} = g(n_0),$$

siendo:  $m \in [1.75, 2.00]$  para las diferentes formulaciones empíricas usualmente empleadas en el cálculo de las pérdidas hidráulicas de carga de una tubería a presión con servicio en ruta, distribución discreta del caudal por salidas equidistantes y régimen permanente y uniforme.

En definitiva, el problema que, sin duda, se planteó Christiansen consistía en obtener la aproximación de la función  $g(x)$  a la función  $f(x)$  con el mínimo error posible, en un entorno del punto de abscisa:  $x = n_0$ , o dicho de otro modo, que dada la función real de variable real:  $F = f(x)$ , definida en  $x = n_0$ , se pretendía encontrar otra función real de variable real:  $F = g(x)$  lo más “sencilla” posible y que se “aproximase” suficientemente a  $f(x)$  en un entorno de radio suficientemente pequeño del punto considerado, hasta el punto que en  $x = n_0$ , también se cumple que:  $f(n_0) = g(n_0)$ . En este caso, el error que se comete en un entorno del punto  $x = n_0$ , cuando en vez de  $f(x)$  se toma la función  $g(x)$ , vendrá dado por la expresión:

$$E = |f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx)|$$

Por otra parte, la *medida de la aproximación* de  $g(x)$  a  $f(x)$  es un cierto número  $r$ , tal que el límite siguiente existe, es finito y distinto de 0, a saber:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{E}{dx^r} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx)|}{dx^r}$$



De alguna manera las funciones que llamamos “elementales” como  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log x$ ,  $e^x$ , ..., etc., no resultan, en realidad, nada elementales; por ejemplo, si deseamos calcular  $\sin x$ , encontramos que, salvo para unos pocos valores como:  $x = 0$ ,  $x = \pi/4$ ,  $x = \pi/2$ , ..., etc., el cálculo directo de  $\sin x$  es imposible. No ocurre así, en cambio, con las funciones polinómicas del tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

donde las operaciones a realizar son simplemente aritméticas. Por ello, tiene gran interés obtener fórmulas que permitan **aproximar** las funciones irracionales o trascendentes mediante polinomios, con el fin de calcular de manera aproximada los valores de aquéllas. Como es natural, en toda aproximación es preciso obtener estimaciones fidedignas del error cometido. Obviamente, no podemos esperar un conocimiento exacto del error, puesto que ello supondría también un conocimiento preciso de la magnitud que aproximamos y haría innecesaria la aproximación. Lo que deseamos, en cualquier caso, es **acotar**, de manera que al realizar la aproximación tengamos la seguridad de que el error cometido no supera cierta cantidad.

Recordemos que, en el Análisis Matemático, el concepto de diferencial supone una aproximación lineal de la función en un entorno del punto en consideración. Diríamos que si  $f(x)$  es una función derivable en el punto  $n_0$ , la función afín  $g(x)$  es tal que:

$$g(x) = f(n_0) + f'(n_0) \cdot (x - n_0)$$

y aproxima los valores de  $f(x)$  en un entorno de  $n_0$ . Puede verse ello gráficamente en la Figura 4.

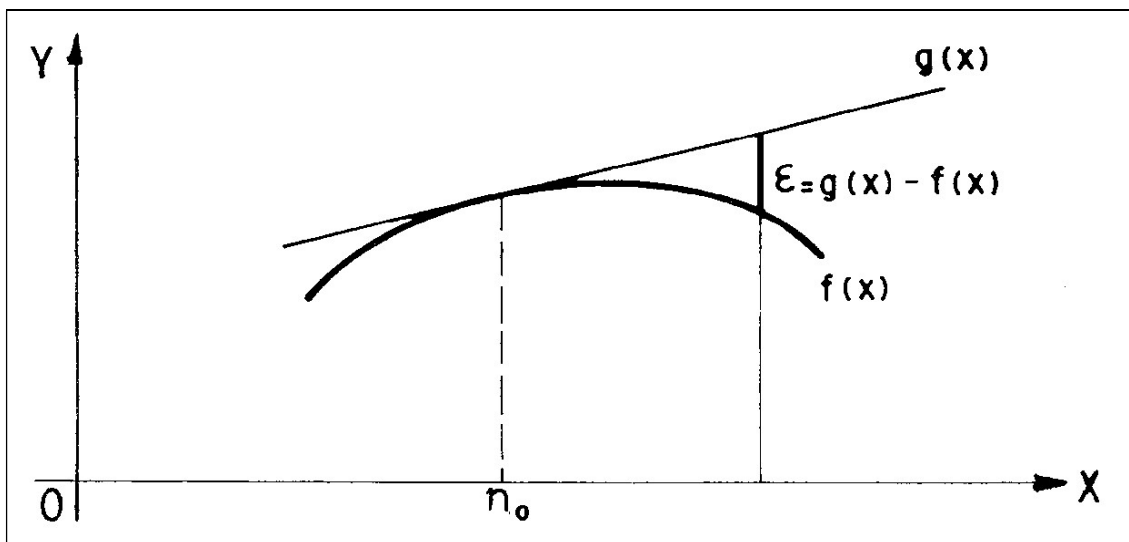


Fig. 4. Aproximación entre las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  en el punto:  $x = n_0$ .

No obstante, el sentido de la palabra “aproxima”, empleado en la afirmación anterior, resulta, a nuestro juicio, excesivamente vago. Podemos precisarlo más si decimos que (Samamed *et al*, 1988):

$$\lim_{x \rightarrow n_0} [g(x) - f(x)] = 0 \quad (7)$$

pero, aunque esa igualdad sugiere que  $f(x)$  y su aproximación  $g(x)$  son más y más parecidos cuánto más próximo está  $x$  de  $n_0$ , no nos proporciona una idea precisa de la magnitud del error cometido al sustituir  $f(x)$  por  $g(x)$  para un valor particular de  $x$ .

Siguiendo este mismo camino podemos afirmar, aún más, que:

$$\lim_{x \rightarrow n_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - n_0} = \lim_{x \rightarrow n_0} \left( \frac{f(x) - f(n_0)}{x - n_0} - f'(n_0) \right) = f'(n_0) - f'(n_0) = 0 \quad (8)$$

Esta afirmación contenida en la expresión (8), aunque sigue siendo imprecisa, resulta más fuerte que la anterior (7), y nos garantiza, no solamente que el error  $|g(x)-f(x)|$  se hace más y más pequeño al acercarnos a  $n_0$ , sino también que esa cantidad comparada con  $(x-n_0)$ , que es una magnitud que decrece hacia cero, tiende también a cero; esto lo resumiremos diciendo que  $|g(x)-f(x)|$  tiende a cero más rápidamente que  $(x-n_0)$ . Con símbolos, las aseveraciones anteriores se expresan escribiendo:

$$g(x) - f(x) = o(x - n_0)$$

que se lee “ $g(x)-f(x)$  es un infinitésimo (una cantidad infinitamente pequeña) comparado con  $(x-n_0)$ ”. Esta notación, que se corresponde con la “o pequeña” de Landau<sup>2</sup> resulta muy útil en el cálculo de límites y para describir términos cuya expresión exacta puede ser complicada, pero cuyo comportamiento en el límite nos es conocido. Para precisarla mejor, damos la definición siguiente:

“Decimos que la función  $h(x)$  es  $o((x-a)^n)$ ,  $h(x) = o((x-a)^n)$ , si se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x - a)^n} = 0 ”$$

Así pues, la notación infinitesimal:  $o((x-a)^n)$  nos permite ofrecer una información cualitativa más que cuantitativa sobre el error cometido en la aproximación funcional.

Por otra parte, podemos razonablemente esperar que si una función posee en un punto varias derivadas, sea posible aproximar los valores de la función en un entorno de ese punto por funciones, más que lineales, polinómicas.

---

<sup>2</sup> Dada una cierta función  $f(x)$ , con la notación  $o(f)$ , se designa cualquier función  $\varphi(x)$  tal que se cumpla que:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0$ . La condición anterior puede substituirse por la siguiente:  $\forall \varepsilon > 0$ , corresponde un entorno:  $\varepsilon^*(a)$  donde:  $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$ . Una ecuación de la forma:  $\varphi = o(f)$  equivale, pues, a la relación anterior.

En algunos puntos de la recta real, la aproximación de ambas funciones puede ser total e incluso coincidente el valor que toman  $f(n_0)$  y  $g(n_0)$ . Y así, veamos que si hubiéramos supuesto, por ejemplo, un exponente de la velocidad del agua de  $m = 2$  (de haber empleado, para el cálculo de las pérdidas de carga de la conducción porta-goteros, la formulación de Manning-Strickler), con  $n_0 = 54$  salidas equidistantes, habríamos obtenido un coeficiente teórico de reducción por salidas de:

$$F = f(n_0) = \frac{(n_0 + 1)(2n_0 + 1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2 + 3n_0 + 1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 54} + \frac{1}{6 \cdot 54^2} = 0.343$$

y, también, la aplicación estricta de la fórmula aproximada de Christiansen conduciría a la obtención exacta del mismo resultado, puesto que:

$$F = g(n_0) = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{2-1}}{6 \cdot n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 54} + \frac{1}{6 \cdot 54^2} = 0.343$$

con lo que el error cometido en la aproximación sería nulo ( $E = 0$ ).

Recordemos que, al principio del presente epígrafe, se decía que se pretendía hallar una cierta función  $g(x)$  “lo más sencilla” posible y que se aproximara “lo suficiente” a la función problema. Anteriormente, ya hemos indicado cómo medir el grado de aproximación en cuestión; ahora bien, al objeto de no perdernos en subjetivismos, ¿qué debemos entender por la expresión “lo más sencilla posible”?

En general, tomaremos como tales funciones las polinómicas o parabólicas (a partir del 2º grado), esto es, las de configuración analítica del tipo:

$$g(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + \dots$$

cuyo grado nos vendrá determinado por la aproximación que deseemos obtener y donde las constantes ( $a, b, c, d, \dots$ ) se hallarán con la condición de que la nueva función  $g(x)$  se aproxime lo más posible a la  $f(x)$ .

La aproximación más sencilla, o sea, la de primer grado, es la lineal ofrecida por la ecuación de la recta tangente a la curva dada  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = n_0$ . Las aproximaciones de orden superior podrán obtenerse por aplicación del conocido teorema de Taylor para el desarrollo de la función  $f(x)$  en dicho punto.

En cualquier caso, el problema eficazmente resuelto por Christiansen alcanzó una mayor complejidad, sin que, por razones desconocidas por quien suscribe, dicho autor quisiera publicitar, en su día, la deducción matemática de su famosa fórmula, cuestión ésta que constituye, precisamente, el objeto fundamental del presente Artículo.

## 5. COEFICIENTE DE CHRISTIANSEN GENERALIZADO

Hace falta, por último, efectuar alguna otra consideración. En el caso particular de que se cumpla que:  $l_0 = 1/2$  (primera salida situada a una distancia del inicio de la conducción igual a la mitad del espacio existente entre las restantes

salidas de la tubería), la expresión general teórica:  $F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m$  tomará la configuración siguiente:

$$F = \frac{1}{n_0^m \cdot \left(n_0 - \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n_0^m}{2} + \sum_{i=1}^{n_0} i^m\right) ,$$

expresión debida a Jensen y Fratini, que, como ya se ha mencionado, se cumplirá exclusivamente para la relación:  $r = l_0 / l = 1/2$ .

Las pérdidas continuas de carga en el tramo genérico  $i$  del eje hidráulico de la conducción, comprendido entre las derivaciones ( $i-1$ )-ésima e  $i$ -ésima, son las siguientes:

$$h_i = n \cdot l \cdot Q_i^m$$

y puesto que el caudal circulante por el tramo  $i$  es:

$$Q_i = (n_0 - i + 1) \cdot q ,$$

las pérdidas de carga en el tramo  $i$  podrán expresarse también como:

$$h_i = n \cdot l \cdot (n_0 - i + 1)^m \cdot q^m .$$

De este modo, las pérdidas de carga continuas en toda la conducción, serán:

$$h = \sum_{i=1}^{n_0} h_i = n \cdot q^m \sum_{i=1}^{n_0} l_i \cdot (n_0 - i + 1)^m = n \cdot q^m \left[ l_0 \cdot n_0^m + \sum_{i=2}^{n_0} (n_0 - i + 1)^m \right] ;$$

y como, a la vez, se cumple el número armónico generalizado:

$$\sum_{i=2}^{n_0} (n_0 - i + 1)^m = \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = H_{n_0-1}^{(-m)} ,$$

quedará la siguiente expresión para las pérdidas de carga:

$$h = n \cdot q^m \cdot l \cdot \left( r \cdot n_0^m + \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m \right) = n \cdot Q^m \cdot L \cdot F$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las diversas relaciones anteriores, se obtiene:

$$q^m \cdot l \cdot \left( r \cdot n_0^m + \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m \right) = n_0^m \cdot q^m \cdot (r + n_0 - 1) \cdot l \cdot F ;$$

$$r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = (r + n_0 - 1) \cdot F ,$$

con lo que despejando el coeficiente de reducción por salidas F (que representaremos genéricamente por  $F_r$ , para cualquier valor que pueda adoptar la relación  $r$ ), se tiene:

$$F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m}{r + n_0 - 1} \quad (9)$$

que constituye la expresión generalizada del coeficiente de reducción por salidas, para cualquiera de los valores de los parámetros  $r$ ,  $n_0$  y de  $m$ .

A continuación, se han tabulado expresamente los valores de  $F_{1/2}$  ( $r = 1/2$ ) y de  $F_1$  ( $r = 1$ ), para diferentes valores de  $n_0$  y de  $m$ , a saber:

Tabla 1. Coeficiente de reducción por salidas F ( $r = 1/2$ ).

$n_0$	$m = 1,75$	$m = 1,80$	$m = 1,85$	$m = 1,90$	$m = 2,00$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,532	0,525	0,518	0,512	0,500
3	0,455	0,448	0,441	0,434	0,422
4	0,426	0,419	0,412	0,405	0,393
5	0,410	0,403	0,397	0,390	0,378
6	0,401	0,394	0,387	0,381	0,369
7	0,395	0,388	0,381	0,375	0,363
8	0,390	0,383	0,377	0,370	0,358
9	0,387	0,380	0,374	0,367	0,355
10	0,384	0,378	0,371	0,365	0,353
11	0,382	0,375	0,369	0,363	0,351
12	0,380	0,374	0,367	0,361	0,349
13	0,379	0,372	0,366	0,360	0,348
14	0,378	0,371	0,365	0,358	0,347
15	0,377	0,370	0,364	0,357	0,346
16	0,376	0,369	0,363	0,357	0,345
17	0,375	0,368	0,362	0,356	0,344
18	0,374	0,368	0,361	0,355	0,343
19	0,374	0,367	0,361	0,355	0,343
20	0,373	0,367	0,360	0,354	0,342
22	0,372	0,366	0,359	0,353	0,341
24	0,372	0,365	0,359	0,352	0,341
26	0,371	0,364	0,358	0,351	0,340
28	0,370	0,364	0,357	0,351	0,340
30	0,370	0,363	0,357	0,350	0,339
35	0,369	0,362	0,356	0,350	0,338
40	0,368	0,362	0,355	0,349	0,338
50	0,367	0,361	0,354	0,348	0,337
100	0,365	0,359	0,353	0,347	0,335
200	0,365	0,358	0,352	0,346	0,334
$\infty$	0,364	0,357	0,351	0,345	0,333

Tabla 2. Coeficiente de reducción por salidas F (r = 1).

$n_0$	$m = 1.00$	$m = 1.75$	$m = 1.80$	$m = 1.85$	$m = 1.90$	$m = 2.00$
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.750	0.650	0.644	0.639	0.634	0.625
3	0.667	0.546	0.540	0.535	0.528	0.518
4	0.625	0.497	0.491	0.486	0.480	0.469
5	0.600	0.469	0.463	0.457	0.451	0.440
6	0.583	0.451	0.445	0.435	0.433	0.421
7	0.571	0.438	0.432	0.425	0.419	0.408
8	0.563	0.428	0.422	0.415	0.410	0.398
9	0.556	0.421	0.414	0.409	0.402	0.391
10	0.550	0.415	0.409	0.402	0.396	0.385
11	0.545	0.410	0.404	0.397	0.392	0.380
12	0.542	0.406	0.400	0.394	0.388	0.376
13	0.538	0.403	0.396	0.391	0.384	0.373
14	0.536	0.400	0.394	0.387	0.381	0.370
15	0.533	0.397	0.391	0.384	0.379	0.367
16	0.531	0.395	0.389	0.382	0.377	0.365
17	0.529	0.393	0.387	0.380	0.375	0.363
18	0.528	0.392	0.385	0.379	0.373	0.361
19	0.526	0.390	0.384	0.377	0.372	0.360
20	0.525	0.389	0.382	0.376	0.370	0.359
22	0.523	0.387	0.380	0.374	0.368	0.357
24	0.521	0.385	0.378	0.372	0.366	0.355
26	0.519	0.383	0.376	0.370	0.364	0.353
28	0.518	0.382	0.375	0.369	0.363	0.351
30	0.517	0.380	0.374	0.368	0.362	0.350
32	0.516	0.379	0.373	0.367	0.361	0.349
35	0.514	0.378	0.371	0.365	0.359	0.347
40	0.513	0.376	0.370	0.364	0.357	0.345
50	0.510	0.374	0.367	0.361	0.355	0.343
60	0.508	0.372	0.366	0.359	0.353	0.342
80	0.506	0.370	0.363	0.357	0.351	0.340
100	0.505	0.369	0.362	0.356	0.350	0.338
150	0.503	0.367	0.360	0.354	0.348	0.337
300	0.502	0.365	0.359	0.353	0.346	0.335
$\infty$	0.500	0.364	0.357	0.351	0.345	0.333

## 6. CÁLCULO PRÁCTICO DEL COEFICIENTE UNIVERSAL DE CHRISTIANSEN

No obstante lo expuesto, teniendo en cuenta el infinito número de valores posibles de  $r$ , resultará más práctico que tabular la ecuación anterior (9) basarse en los correspondientes valores para  $r = 1$  para el cálculo del resto de los valores de  $F$ . En efecto, dado que se cumple la igualdad en el número armónico generalizado:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = \sum_{i=1}^{n_0} i^m - n_0^m ,$$

y además de la ecuación:  $F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m$  se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = F \cdot n_0^{1+m} ,$$

También se habrá de satisfacer la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m ,$$

que introducida en la expresión:  $F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m}{r + n_0 - 1}$ , la transforma en:

$$F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot (F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m)}{r + n_0 - 1} = \frac{r + n_0 \cdot F - 1}{r + n_0 - 1} ,$$

que permite la obtención del valor de  $F_r$  para cualquier valor de  $r$ , en función del correspondiente a  $F_1$  ( $r = 1$ ), para los mismos valores de los restantes parámetros  $n_0$  y  $m$ . Obviamente, para  $n_0 = 1$ , también  $F_r = 1.00$ , y ello con independencia de los valores de la relación:  $r = l_0 / l$ .

## 7. CONCLUSIONES

El cálculo de las pérdidas de carga de una conducción de característica única, con servicio en ruta y distribución discreta del gasto, régimen permanente y uniforme, caudal constante por derivación y salidas equidistantes, de gran interés práctico para el dimensionamiento de instalaciones de riego por aspersión y localizados de alta frecuencia (microaspersión, exudación, goteo) fue resuelto por Christiansen (1942) mediante una formulación aproximada cuya justificación matemática, que nunca fue expuesta por su autor, se realiza en el presente Artículo, lo que constituye un tema de notable interés teórico y de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto.

## NOTA TÉCNICA COMPLEMENTARIA

### 1. Continuación de la justificación matemática

El autor ha continuado sus estudios en relación a la justificación matemática de la función aproximada de Christiansen mediante otros procedimientos que han sido expuestos en el Cap. 10 de su libro de referencia "FRANQUET BERNIS, J.M. (2019). *Dimensionamiento y distribución de las conducciones hidráulicas (una contribución de la Ingeniería Matemática)*. Ed. Centro Asociado de la UNED. Cadup-Estudios. Tortosa. 962 p." y que hemos creído oportuno transcribir aquí por su interés específico al caso que nos ocupa.

Prosiguiendo con el desarrollo del epígrafe 2 del presente Artículo representamos ahora las figuras 10.4 y 10.5 del citado libro (p. 715) donde se aprecia el problema planteado con mayor detalle, v. gr., para  $n_0 = 5$ , o sea:

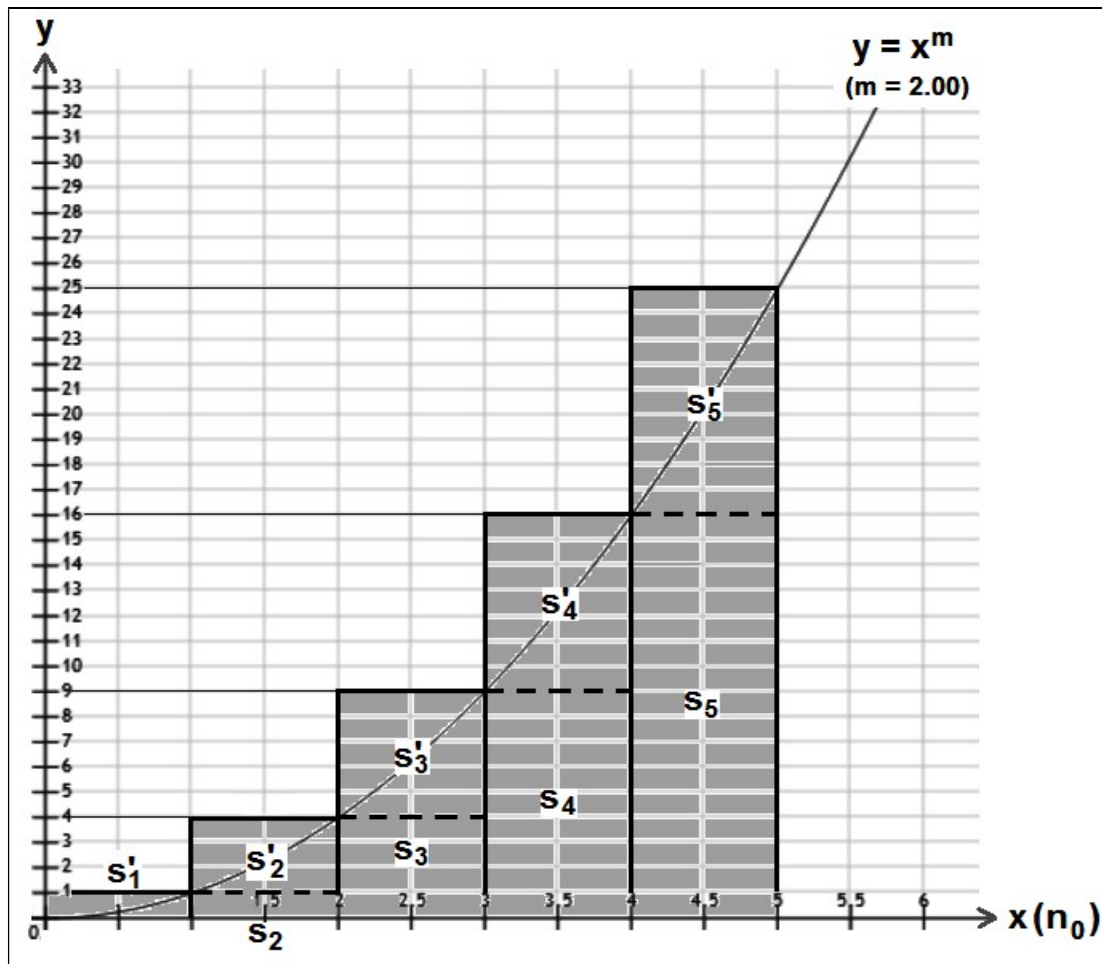


Fig. 5 (10.4). Área de los rectángulos yuxtapuestos.



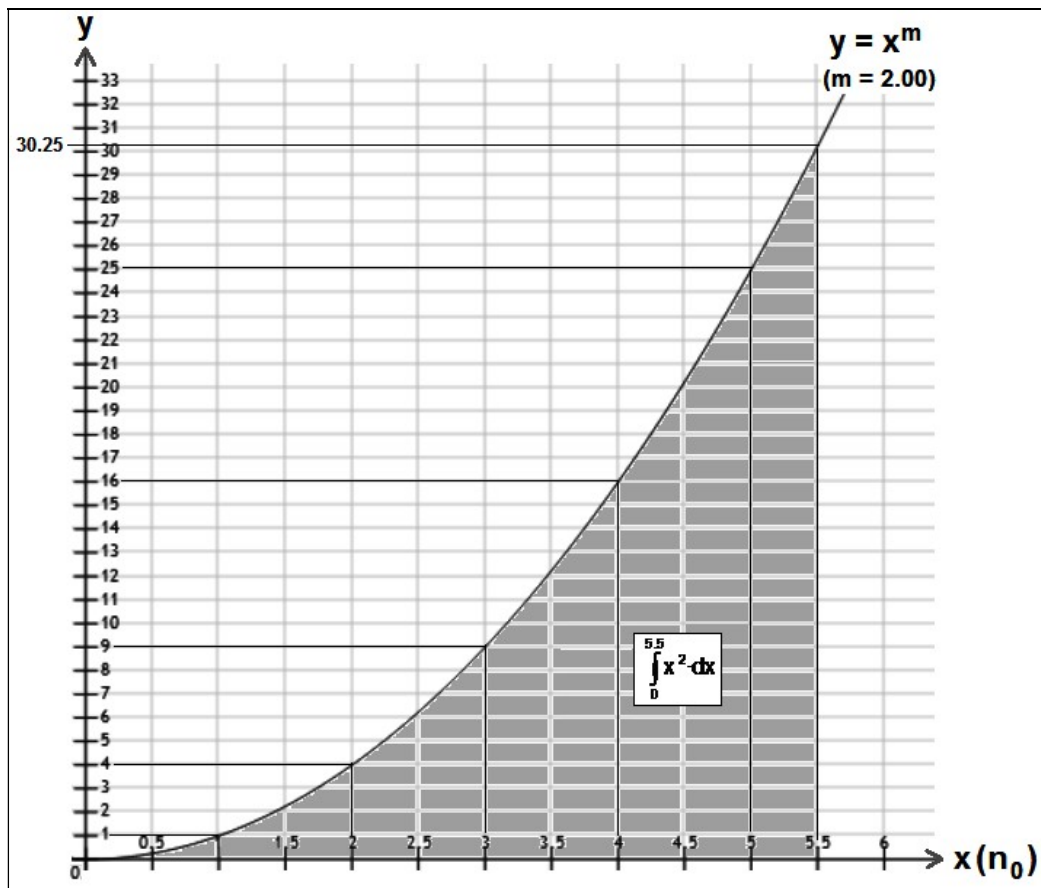


Fig. 6 (10.5). Área bajo la curva  $y = x^m$ .

De la contemplación de la figura 10.4, con  $m = 2$ , se infiere inmediatamente que se cumple, en relación a la superficie sombreada:

$$(s_2 + s_3 + \dots + s_{n_0}) < \int_0^{n_0} x^m \cdot dx < [s'_1 + (s_2 + s'_2) + \dots + (s_{n_0} + s'_{n_0})], \text{ esto es:}$$

$$\sum_{i=2}^{n_0} s_i < \int_0^{n_0} x^m \cdot dx < s'_1 + \sum_{i=2}^{n_0} (s_i + s'_i) = \sum_{i=1}^{n_0} i^2.$$

Se trata, pues, de obtener el valor de un cierto parámetro  $K$  que debe añadirse al resultado de la integral, tal que:  $\int_0^{n_0} x^m \cdot dx + K \cong \sum_{i=1}^{n_0} i^2$ , para conseguir que el área existente debajo de la curva  $y = x^2$  se aproxime lo máximo posible al valor real de la expresión de la suma de la serie  $\sum_{i=1}^{n_0} i^2$ . Ello puede conseguirse, por ejemplo, mediante dos procedimientos alternativos cuyo mejor ajuste debe ser contrastado, a saber:

A) el ya sugerido de incrementar el límite superior de la integral en  $k = \frac{1}{2} = 0.500$ , y

B) haciendo, al parecer,  $K = \frac{n_0}{2}$ .

Veámoslos, respectivamente, mediante una aproximación del sumatorio por una integral definida:

A) Se intenta aproximar, con el mínimo error posible, el valor del área sombreada de la Fig. 10.5 estimada mediante la integral definida

$$g(x) = \int_0^{n_0+k} x^2 \cdot dx, \text{ con } k = 0.500, \text{ al valor del área real representada por la suma}$$

de las áreas individuales de los rectángulos yuxtapuestos  $f(x) = \sum_{i=1}^{n_0} i^2$  de la Fig. 10.4 del manual antedicho.

Veamos que la expresión  $\sum_{i=1}^{n_0} i^m$ , que representa la suma de las áreas de los rectángulos yuxtapuestos de alturas  $i^m$  y base 1, la aproximamos por el área existente entre la curva potencial  $y = x^m$  y el eje de las abscisas entre los límites  $x = 0$  y  $x = n_0 + \frac{1}{2}$  dado que se comete un cierto error relativo en la aproximación que es perfectamente asumible. Va aumentando progresivamente con los valores  $n_0$  la diferencia existente entre  $g(x)$  y  $f(x)$  en términos de error absoluto aunque disminuyendo en términos de error relativo, como puede comprobarse en la tabla correspondiente del anexo 5. En dicho anexo se observan los valores que toman ambas funciones para  $n_0 \in [1,100]$  y los tres supuestos del exponente  $m$  de la velocidad (o el caudal) en los diferentes modelos hidráulicos de cálculo de las pérdidas de carga continuas para las conducciones forzadas de diversos fluidos, esto es:  $m = 1.50$ ,  $m = 2.00$  y  $m = 3.00$ , con sus correspondientes errores absolutos y relativos.

Puede comprobarse que, en todos los casos, la función aproximada  $g(x)$  resulta algo superior a la  $f(x)$ , aunque ello pueda resultar irrelevante desde el punto de vista práctico. Ello obliga a reducir ligeramente la cuantía del límite superior de la integral definida hasta alcanzar un valor más ajustado a la realidad del fenómeno en estudio, por lo que trataremos de hallar, a continuación, el nuevo valor del coeficiente  $k$ .

Para  $m = 2$ , se tendrá que el valor de la suma de la serie es:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^2 = \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} = \frac{n_0^3}{3} + \frac{n_0^2}{2} + \frac{n_0}{6} \quad (10)$$

tratándose de una serie de carácter divergente, puesto que según el criterio de Raabe-Rolf y en el supuesto de un riego por exudación con un número teórico

infinito de salidas equidistantes:  $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} n_0 \left( 1 - \frac{n_0^2}{(n_0-1)^2} \right) = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} n_0 \cdot 0 = 0 < 1$ , y

también según el criterio de Duhamel:  $\frac{n_0^2}{(n_0-1)^2} > 1$ . Por otra parte:

$$\int_0^{n_0+k} x^m \cdot dx = \left[ \frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{n_0+k} = \frac{(n_0+k)^{m+1}}{m+1} = (m=2) = \frac{(n_0+k)^3}{3} \quad (11)$$

La igualación de ambos resultados (10) y (11) conducirá a la obtención de un coeficiente  $k$  más ajustado, o sea:

$$n_0(n_0 + 1)(2n_0 + 1) = 2(n_0 + k)^3 = 2(n_0^3 + 3n_0^2 \cdot k + 3n_0 \cdot k^2 + k^3);$$

$$2n_0^3 + 3n_0^2 + n_0 = 2n_0^3 + 6n_0^2 \cdot k + 6n_0 \cdot k^2 + 2k^3, \text{ de donde:}$$

$$2k^3 + 6n_0k^2 + 6n_0^2k - 3n_0^2 - n_0 = 0.$$

Para  $n_0 = 10 \rightarrow 2k^3 + 60k^2 + 600k - 300 - 10 = 0$ , y se obtiene, en definitiva, la ecuación:

$$k^3 + 30k^2 + 300k - 155 = 0, \text{ de la que se deduce la raíz:}$$

$$k = \sqrt[3]{1155} - 10 = 10.492057 - 10 = 0.492057.$$

Alternativamente, para  $m = 3$  se tendrá que el valor de la suma de la serie es:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^3 = \left[ \frac{n_0(n_0 + 1)}{2} \right]^2 = \frac{n_0^4}{4} + \frac{n_0^3}{2} + \frac{n_0^2}{4} = \left( \sum_{i=1}^{n_0} i \right)^2,$$

serie también divergente como la anterior, que resulta ser equivalente al cuadrado de la suma de los términos de una progresión aritmética de razón unidad. En general, aunque aquí no resulta posible aplicar el criterio del "test integral" por ser los términos crecientes, el carácter divergente de estas series

cuya suma es del tipo:  $\sum_{n_0=1}^{\infty} n_0^m$  se pone de manifiesto por aplicación de otros

diversos criterios como el de Pringsheim o el 2º criterio de Cauchy (o del logaritmo), puesto que, v. gr., por aplicación de este último:

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n_0^m}}{\ln n_0} = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{-\ln n_0^m}{\ln n_0} = - \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{m \cdot \ln n_0}{\ln n_0} = -m < 1.$$

Operando como en el caso anterior, se tiene que:

$$\int_0^{n_0+k} x^m \cdot dx = \frac{(n_0 + k)^{m+1}}{m+1} = (m=3) = \frac{(n_0 + k)^4}{4}; \frac{(n_0^2 + n_0)^2}{4} = \frac{(n_0 + k)^4}{4}; \text{ con lo que:}$$

$$n_0^4 + 2n_0^3 + n_0^2 = n_0^4 + 4n_0^3 \cdot k + 6n_0^2 \cdot k^2 + 4n_0 \cdot k^3 + k^4; \text{ de donde:}$$

$$k^4 + 4n_0 \cdot k^3 + 6n_0^2 \cdot k^2 + 4n_0^3 \cdot k - 2n_0^3 - n_0^2 = 0.$$

Para  $n_0 = 10 \rightarrow k^4 + 40k^3 + 600k^2 + 4000k - 2100 = 0$ , y se obtiene la solución:

$$k = \sqrt{110} - 10 = 10.488088 - 10 = 0.488088,$$

valor éste que resulta algo inferior al obtenido anteriormente para  $m = 2$ .

Como, en realidad, en las formulaciones empíricas empleadas para la determinación de las pérdidas de carga continuas que tienen lugar en las conducciones cerradas para los diferentes fluidos, se tiene un campo de existencia  $m \in [1.5, 2.0]$ , se considera prudente aceptar, v. gr., como norma, un  $k = 0.493$ , que iguala, con mayor aproximación que el  $\frac{1}{2} = 0.500$ , el área sombreada existente bajo la curva (Fig. 10.5) con la real correspondiente a la suma de la superficie de los rectángulos yuxtapuestos (Fig. 10.4).

Ello puede comprobarse, así mismo, de la contemplación de las tablas correspondientes del anexo 5 del manual del año 2019 (2ª opción), en que los nuevos errores absolutos y relativos cometidos (con  $k = 0.493$ ), para los variados supuestos en que se tienen los valores:  $m = 1.50$ ,  $m = 1.60$ ,  $m = 1.70$ ,  $m = 1.80$ ,  $m = 1.90$  y  $m = 2.00$  resultan generalmente inferiores a los que aparecen en las tablas mencionadas considerando  $k = 0.500$ .

B) Del mismo modo, se adjunta en el anexo 5 del manual citado la tabla correspondiente (3ª opción) en la que se ha considerado  $K = \frac{n_0}{2}$ , obteniéndose unos errores de aproximación sensiblemente superiores a los hallados en el supuesto anterior A), por lo que esta opción de aproximación debe ser definitivamente descartada.

## 2. Ajuste por regresión multilínea (p. 719 del manual del 2019)

Otra cuestión de interés estriba en la realización de un ajuste múltiple minimocuadrático por regresión no lineal a una función de las dos variables ( $m$  y  $n_0$ ) que resulte aún más ajustada a la realidad que la aproximación  $F$  de Christiansen para el cálculo de las tuberías con servicio en ruta, distribución discreta de caudales constantes y salidas equidistantes, en régimen permanente y uniforme, para cuya validación habrá que realizar la correspondiente comparación de resultados. Es conveniente la realización de un ajuste de este tipo y su contrastación con el valor exacto de  $F$  (suma de la serie) y la aplicación de la fórmula aproximada de Christiansen. Se ha llevado a cabo para los valores de  $m \in [1.50, 3.00]$  con saltos de 5 centésimas, así como para todos los valores de  $n_0 \in [1, 50]$ . El resultado del tercer sumando de la expresión obtenida por regresión logarítmica (regresión 2), según puede verse en el anexo 5, con sus coeficientes redondeados hasta las milésimas, es el siguiente:  $\frac{0.165(m-1)^{0.509}}{n_0^{1.995}}$ , que coincide substancialmente con el término

original de Christiansen:  $\frac{\sqrt{m-1}}{6n_0^2}$ . Por otra parte, también la regresión 3 de

dicho anexo presenta una expresión muy cercana a la aproximación propugnada por Christiansen, o sea:

$$F = \frac{1.0002}{m+1} + \frac{0.4978}{n_0} + 0.1608 \times \frac{\sqrt{m-1}}{n_0^2} \approx \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2}$$

El tercer sumando de esta última regresión coincide substancialmente con el obtenido mediante la anterior regresión logarítmica 2, o sea:

$$0.165 \times \frac{(m-1)^{0.509}}{n_0^{1.995}} \approx 0.1608 \times \frac{\sqrt{m-1}}{n_0^2} \approx \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2}$$

De hecho, ello no es más que posiblemente unas simplificaciones o redondeos de cifras decimales realizadas manualmente por aquel autor con el objetivo de hacerla más elegante y operativa. De este modo, no resultaría aventurado inferir que Christiansen podría haber obtenido su famosa función aproximada por alguna regresión minimocuadrática, habiendo efectuado posteriormente unos ciertos “retoques” finales. Ello puede suponer una constatación razonable del origen de la famosa expresión aproximada que nos ocupa.

### 3. Determinación analítica más exacta de la expresión aproximada. La función “zeta de Riemann” (pp. 723-725 del manual del 2019)

De acuerdo con el artículo original (Christiansen, 1942) donde aparece publicada, por vez primera, dicha expresión aproximada, se trataría de

desarrollar la expresión:  $F = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} i^m}{n_0^{1+m}}$ , teniendo en cuenta la formulación de la

suma de la serie de potencias de los números naturales (enteros positivos) debida a Faulhaber-Bernouilli, siendo los  $B_j$  los denominados “números de Bernouilli”. De hecho, dichos números no tienen una descripción elemental y son esencialmente valores de la función “zeta de Riemann” para enteros negativos, que se hallan asociados a propiedades profundas de la teoría de los números, por cuya razón no se espera que posean lógicamente una formulación trivial.

En este caso, se tendría la suma de potencias:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} \cdot B_j \cdot n_0^{m-j+1} = \frac{(n_0+1)^{m+1}}{m+1} + \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \frac{B_i}{m-i+1} (n_0+1)^{m-i+1},$$

con  $B_1 = + \frac{1}{2}$  en vez de  $- \frac{1}{2}$ . Entonces:  $F = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} i^m}{n_0^{1+m}} = \frac{B_{m+1}(n_0+1) - B_{m+1}(0)}{n_0^{1+m}(m+1)}$ .

Teniendo en cuenta el valor del polinomio de Bernouilli para  $m = 1$ , sucede que:

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \text{ cuyo desarrollo ofrece, con } x = n_0 + 1:$$

$$F = \frac{B_2(n_0 + 1) - B_2(0)}{2n_0^2} = \frac{(n_0 + 1)^2 - (n_0 + 1) + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}}{2n_0^2} = \frac{n_0^2 + n_0}{2n_0^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n_0},$$

que resulta plenamente coincidente con la aproximación de Christiansen para  $m = 1$ .

Así mismo, teniendo en cuenta el valor del polinomio de Bernoulli para  $m = 2$ , puesto que  $B_3(0) = 0$  ya que los números de Bernoulli de índice impar resultan nulos, lo que constituye una propiedad que es general para todos ellos, sucede que:

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \text{ cuyo desarrollo ofrece, con } x = n_0 + 1:$$

$$F = \frac{B_3(n_0 + 1)}{3n_0^3} = \frac{(n_0 + 1)^3 - \frac{3(n_0 + 1)^2}{2} + \frac{n_0 + 1}{2}}{3n_0^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{6n_0^2},$$

que también resulta plenamente coincidente con la aproximación de Christiansen para  $m = 2$ . A partir de ahí, este autor pudo generalizar a otros valores usuales de  $m$  (básicamente los comprendidos entre 1.5 y 2.0, por su interés en la hidráulica) su conocida expresión.

Por último, teniendo en cuenta el valor correspondiente del polinomio de Bernoulli para  $m = 3$ , sucede que:

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \text{ cuyo desarrollo ofrece, con } x = n_0 + 1:$$

$$F = \frac{B_4(n_0 + 1) - B_4(0)}{4n_0^4} = \frac{(n_0 + 1)^4 - 2(n_0 + 1)^3 + (n_0 + 1)^2 - \frac{1}{30} + \frac{1}{30}}{4n_0^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{4n_0^2},$$

existiendo aquí una pequeña discrepancia con la formulación de Christiansen en el tercer sumando<sup>3</sup>, que sería:  $\frac{\sqrt{2}}{6n_0^2}$  frente al ahora obtenido de:  $\frac{1}{4n_0^2}$ , tal

como se ha apuntado en el apartado anterior 2. En todo caso, la determinación del grado más correcto de la raíz que aparece en el numerador resulta

inmediata haciendo:  $\frac{\sqrt[1/x]{2}}{6} = \frac{1}{4} = \frac{2^x}{6}$ , de donde se infiere que:

$$x = \frac{\log 1.5}{\log 2} = \frac{0.1760912}{0.30103} = 0.585, \text{ y el grado de la raíz deberá ser:}$$

<sup>3</sup> Esta consideración ya fue tenida en cuenta por el propio Christiansen, cuando en una nota al pie de página del artículo original afirma que su expresión es exacta para los valores  $m = 1$  y  $m = 2$ , y es casi correcta para  $m = 3$  y valores intermedios. También dice que  $\forall n_0 > 10$ , el último término de su expresión aproximada resulta insignificante y puede omitirse a efectos prácticos.

$1/0.585 = 1.71$ , con lo que la expresión de la formulación de Christiansen quedaría definitivamente corregida así, proporcionando valores exactos:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt[1.71]{m-1}}{6 \cdot n_0^2} = g(n_0), \forall m \text{ tal que } m \in [1,2,3].$$

Por último, veamos que ya que anteriormente se ha hecho referencia a ella, veamos que la función “zeta de Riemann” (a menudo denominada **dzeta** por transliteración de la letra griega  $\zeta / \zeta$ ), nombrada en honor al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), es una función que tiene una importancia significativa en la teoría de números, por su relación con la distribución de los números primos. También tiene aplicaciones en otras áreas tales como la física, la teoría de probabilidad y la estadística aplicada.

El valor de la función zeta para los números pares negativos es 0 (viendo la ecuación funcional es evidente), por lo que son llamados **ceros triviales**. Aparte de los ceros triviales, la función también se anula en valores de  $s$  que están dentro del rango  $\{s \in \mathbf{C}: 0 < \text{Re}(s) < 1\}$ , y que son llamados **ceros no triviales**, debido a que es más difícil demostrar la ubicación de esos ceros dentro del **rango crítico**. El estudio de la distribución de estos «ceros no triviales» es muy importante, debido a que tiene profundas implicaciones en la distribución de los números primos y en cuestiones relacionadas con la teoría de números. La hipótesis de Riemann, considerado uno de los mayores problemas matemáticos abiertos en la actualidad, asegura que cualquier cero no trivial tiene que cumplir  $\text{Re}(s) = 1/2$ , por lo tanto, todos los ceros están alineados en el plano complejo formando una recta, llamada **recta crítica**.

La localización de estos ceros tiene significativa importancia en la teoría de números, ya que, por ejemplo, el hecho de que todos los ceros estén en el rango crítico demuestra el teorema de los números primos.

La función zeta de Riemann se postula como una de las funciones complejas más conocidas en matemáticas. Es objeto de estudio de incontables ramas de investigación y la información que encierra ha traído de cabeza a algunos de los mejores matemáticos de la historia. Ha ido pasando de generación en generación, suscitando más preguntas que respuestas y tendiendo puentes entre áreas de la matemática *a priori* irreconciliables (Titchmarsh, 1986).

Dentro del análisis complejo, define una función meromorfa con un único punto singular en  $s = 1$ . Este caso particular resulta en la serie armónica, una de las series divergentes que mejor explica cómo se comporta el sonido, apoyándose en las series de Fourier. Pero fuera de este contexto, en la inarmonía, donde el sonido opta por abrazar las funciones de Bessel, aún es posible encontrar la presencia de la función zeta. Paradójicamente, al parecer, es responsable directa de desdibujar la frontera entre armonía e inarmonía.

Quizás se puede llegar a pensar que esto es todo, no resulta plausible que esta función encierre más misterios, pero la realidad dista mucho de ese escenario. Riemann, publicó en 1859 su tesis de apenas diez páginas: “Sobre la cantidad

de números primos menores a una cantidad dada”. Este documento pasaría a la historia por proponer, en unas pequeñas conclusiones al final del mismo, el que se convertiría en el problema más importante de la historia de las matemáticas: La Hipótesis de Riemann. A la vez considerado como uno de los problemas del milenio y uno de los 23 problemas de la Lista de Hilbert (1862-1943) presentados a comienzos en el siglo XX.

Se trata de uno de esos enunciados de fácil exposición, pero también de casi imposible demostración. Su importancia, como ya se ha visto, radica en que, de ser verdadera, nos brindaría información muy valiosa acerca de la distribución de los números primos, que han sido desde siempre motivo de estudio para los matemáticos (Morzelle y Bucher, 2018).

En tanto que la hipótesis fue verificada para los primeros 1013 ceros, la comunidad matemática internacional, en términos generales, apuesta por su veracidad. Pero también sabemos que, en esta ciencia, hasta que no tengan demostración, las conjeturas no se califican a la condición de teoremas. El hecho es que la hipótesis de Riemann, que ya tiene más de 160 años, aún no ha sido demostrada ni refutada. Actualmente, uno de los enfoques más populares para el estudio de la misma es la teoría de las "L-funciones".

#### **4. Resumen de la metodología empleada (p. 910 del manual del 2019)**

El cálculo de las pérdidas de carga en una tubería con distribución discreta del gasto, régimen permanente y uniforme, caudal constante por derivación y salidas equidistantes (conducción a presión con servicio en ruta), fue abordado y resuelto por Christiansen en el año 1942, para el caso en que la primera derivación estuviera situada a una distancia del extremo aguas arriba de la tubería igual al espaciamiento existente entre todas las derivaciones. Posteriormente, en 1957, Jensen y Fratini introdujeron la correspondiente modificación en el valor del coeficiente de Christiansen para el caso de que la primera salida se hallara a una distancia del comienzo del ramal (línea portagotos o portaaspersores) igual a la mitad de su espaciamiento. Dichas circunstancias se vienen presentando, sistemáticamente, en el diseño de las redes de riego por aspersión y en los localizados de alta frecuencia (microaspersión, exudación y goteo). El ensayo original, de tipo académico e ingenieril, que se desarrolla en el presente Artículo, trata de la justificación matemática de la función aproximada de Christiansen, que constituye un tema de notable interés teórico y de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto. Aplicando diversos métodos de regresión minimocuadrática (que constatan la bondad de la aproximación) o bien basados en los polinomios de Bernoulli (que pudieron justificar su elaboración), se propone una corrección de dicha aproximación, modificando ligeramente el numerador del tercer sumando de la misma para hacerla exacta en todo el intervalo real de interés hidráulico  $m \in [1,2,3]$ .



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y FONDOS DOCUMENTALES

1. ÁNGELES, V., CARRILLO, M., IBÁÑEZ, L., ARTEAGA, R., & VÁZQUEZ, M. "Estrategias alternativas en la determinación del factor de ajuste en el cálculo de la pérdida de carga por fricción en tuberías con salidas múltiples". *Rev. Ingeniería del Agua*, 16(1), 41–50, 2009. <https://doi.org/https://doi.org/10.4995/ia.2009.2941>
2. CHRISTIANSEN, J.E. "Irrigation by Sprinkling". *Bulletin* 670. University of California. Agricultural Experimental Station. Berkeley, California. 124 p, 1942.
3. CONAGUA, Comisión Nacional del Agua. *Manual para la elaboración y revisión de proyectos ejecutivos de sistemas de riego parcelario*. Comisión Nacional del Agua, Subdirección General de Operación, Gerencia de Distritos y Unidades de Riego. México: Comisión Nacional del Agua. 2002.
4. DARCY, H. y BAZIN, H. *Recherches hydrauliques entreprises par M. Henry Darcy continuées par M. Henri Bazin. Deuxième partie. Recherches expérimentales relatives au remous et à la propagation des ondes*. Tomo II. Paris, 1865. Imprimerie impériale.
5. FRANQUET, J.M. *Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas (Una aproximación de los métodos estadísticos)*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya (UIC). Tortosa, 2005. 590 p.
6. KÜTTER, W. R. *Allgemeine Bauzeitung*, 35. 1870.
7. LÉVY, M. "Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire". *Comptes Rendus*, v. 129, 1899.
8. MARTÍNEZ, R. *Riego localizado: Diseño y Evaluación*. Texcoco, Estado de México: Universidad Autónoma Chapingo, 1991. 162 p.
9. MONTALVO, T. "Generalización del coeficiente de Christiansen". *Rev. AGRÓNOMOS* n°: 1. Verano. Colegio Oficial de Ingenieros Agrónomos de Levante. Valencia, 1989.
10. MORCELLE, D. y BUCHER, A. "Introducción a la función Zeta de Riemann". UNLP, Argentina, 2018. 20 p.
11. SAMAMED, O., PRIETO, E., RODRÍGUEZ, J. y ALCAIDE, A. *Matemáticas 1 (Economía y Empresa)*. Ed. CEURA. Madrid, 1988. 770 p.
12. STRICKLER, A. "Sektionschef des Eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft", *Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauheitszahl für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen*. Mitteilungen des Eidg. Amtes für Wasserwirtschaft. Bern, 1923.
13. TITCHMARSH, E. C. *The Theory of the Riemann Zeta Function*. (2nd ed.). New York: Oxford University Press, 1986.
14. TORRES, J.E. *Apuntes de hidráulica general y agrícola. Primera y Segunda Parte*. Universidad Politécnica de Valencia. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Valencia, 1970.
15. WEISBACH, J. *Untersuchungen aus dem Gebiet der Mechanik und Hydraulik*. Leipzig: Weidmann's Buchhandlung, 1843. Recuperado de: [https://archive.org/details/bub\\_gb\\_LchJAAAcAAJ/page/n5](https://archive.org/details/bub_gb_LchJAAAcAAJ/page/n5).

## RELACIÓN DE FIGURAS

Fig. 1. Tubería con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal constante  $q$ .

Fig. 2. Representación gráfica para  $m = 2.00$ .

Fig. 3. Tubería saliente de un depósito con tomas de idéntico caudal.

Fig. 4. Aproximación entre las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  en el punto:  $x = n_0$ .

Fig. 5. Área de los rectángulos yuxtapuestos.

Fig. 6. Área bajo la curva  $y = x^m$ .

## RELACIÓN DE TABLAS

Tabla 1. Coeficiente de reducción por salidas  $F$  ( $r = \frac{1}{2}$ ).

Tabla 2. Coeficiente de reducción por salidas  $F$  ( $r = 1$ ).