



AL VOLTANT DELS NOMBRES PRIMERS I LA CONJECTURA DE GOLDBACH (1742)

ON PRIME NUMBERS AND GOLDBACH'S CONJECTURE (1742)

INDEX

	<u>Pàg.</u>
Resum / Resumen / Abstract.....	3
PART I. NOMBRES PRIMERS, ESTADÍSTICA I SÈRIES NUMÈRIQUES.....	4
1. Introducció. La Teoria de Nombres i els nombres primers	4
2. Classificació i ampliacions successives del concepte de nombre	5
3. Amistat amb un geni anomenat Euler	10
4. La infinitat dels nombres primers.....	11
5. Convergència i divergència de sèries i recíprocs dels nombres primers	13
6. Estadística descriptiva dels nombres primers	19
6.1. Continguts als primers 200 números naturals	19
6.2. Continguts als primers 1000 números naturals	20
6.3. Continguts als primers 10000 números naturals	23
6.3.1. Introducció	23
6.3.2. Valors centrals de la distribució de freqüències	25
6.3.3. Mesures de dispersió	31
6.3.4. Asimetria o biaix	34
6.3.5. Apuntament o curtosi.....	36
6.3.6. Mesures de concentració	37
6.3.7. Mesura d'independència	40

	<u>Pàg.</u>
7. Mostreig estratificat	43
7.1. Objecte	43
7.2. Afixació uniforme	44
7.3. Afixació proporcional	44
7.4. Afixació òptima	44
7.5. Afixació valoral	46
8. Mecanisme generador de nombres primers	46
 PART II. PLANTEJAMENT I DEMOSTRACIONS	 53
1. La conjectura forta o binària de Goldbach (plantejament)	53
2. La conjectura dèbil o ternària de Goldbach (plantejament)	54
3. Les diferents mitjanes de dos nombres primers (demostració)	55
4. Una aproximació geomètrica (demostració)	58
4.1. Conjectura forta o binària	58
4.2. Conjectura feble o ternària	60
5. Un altre intent de demostració de la conjectura forta o binària.....	61
6. Metàfora o paràbola de les gotes d'aigua (demostració).....	64
 PART III. UNES REFLEXIONS FINALS.....	 66
 PART IV. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES I RECOMANACIONS	 71
Símbols, abreviatures i sigles.....	76
 Annex d'informació complementària	 78
1. Nombres primers compresos en els 10000 primers números naturals	78
2. Percentils de la distribució χ^2 de Pearson	82
3. Distribució normal tipificada $N(0,1)$	83
 Relació de figures / Relació de taules	 84
 Índex onomàstic d'autors	 85

Josep M. Franquet Bernis
Dr. Enginyer Agrònom, EUR-ING
Dr. Ciències Econòmiques i Empresariales
Diplomat en Investigació Operativa
Membre de la Societat Catalana de Matemàtiques
Membre de la Reial Societat Matemàtica Espanyola
Acadèmic Numerari de la Reial Acadèmia Europea de Doctors
Ex Director del Centre Associat de Tortosa i del Campus Nord-est de la UNED

RESUM

Un cop presentades diverses consideracions envers els nombres primers, es recorda que la conjectura forta o binària de Goldbach proclama que tot nombre parell suficientment gran (més gran que 2) pot expressar-se com a suma de dos nombres primers, mentre que la conjectura feble o ternària addueix que tot nombre imparell o senar prou gran (més gran que 5) pot expressar-se com a suma de tres nombres primers, i aquesta darrera ja ha estat demostrada a l'any 2013. El present article conté un intent de demostració de la conjectura forta partint no només del raonament matemàtic sinó també del lògic-inductiu. El treball comença també amb diverses consideracions en relació a les sèries numèriques i a l'estadística descriptiva dels nombres primers continguts en els primers 10000 nombres naturals.

Mots clau: nombre primer, nombre natural, sèrie, terme general, model, convergència, infinitud, metàfora, inducció, distribució, concentració, mostreig, estrat.

RESUMEN

Una vez presentadas diversas consideraciones acerca de los números primos, se recuerda que la conjetura fuerte o binaria de Goldbach proclama que todo número par suficientemente grande (mayor que 2) puede expresarse como suma de dos números primos, mientras que la conjetura débil o ternaria aduce que todo número impar suficientemente grande (mayor que 5) puede expresarse como suma de tres números primos, y ésta ya ha sido demostrada en el año 2013. El presente artículo contiene un intento de demostración de la conjetura fuerte partiendo no solo del razonamiento matemático sino también del lógico-inductivo. El trabajo se inicia también con diversas consideraciones en relación a las series numéricas y a la estadística descriptiva de los números primos contenidos en los primeros 10000 números naturales.

Palabras clave: número primo, número natural, serie, término general, modelo, convergencia, infinitud, metáfora, inducción, distribución, concentración, muestreo, estrato.

SUMMARY / ABSTRACT

Once various considerations about prime numbers have been presented, it is remembered that Goldbach's strong or binary conjecture proclaims that every sufficiently large even number (greater than 2) can be expressed as the sum of two prime numbers, while the weak or ternary conjecture claims that every sufficiently large odd number (greater than 5) can be expressed as the sum of three prime numbers, and this has already been demonstrated in 2013. This article contains an attempt at a demonstration of the strong conjecture based not only on mathematical reasoning but also on logical-inductive reasoning. The work also begins with various considerations in relation to the numerical series and the descriptive statistics of the prime numbers contained in the first 10,000 natural numbers.

Key words: *prime number, natural number, series, general term, model, convergence, infinity, metaphor, induction, distribution, concentration, sampling, stratum.*

PART I. NOMBRES PRIMERS, ESTADÍSTICA I SÈRIES NUMÈRIQUES

1. INTRODUCCIÓ. LA TEORIA DE NOMBRES I ELS NOMBRES PRIMERS

Crec, juntament amb Alberto A. Enríquez Vanderkan, que els nombres primers exerceixen sobre els seus múltiples estudiosos una fascinació hipnòtica. Hi ha tres raons bàsiques per a això. La primera és que qualsevol nombre natural pot descompondre's en factors de nombres primers, encara que alguns d'aquests nombres primers es repeteixin, cosa que constitueix el Teorema Fonamental de l'Aritmètica¹ que no implica que l'1 no pot ser primer en dir que: qualsevol nombre enter més gran que 1 es pot escriure com un únic producte de nombres primers. Si acceptéssim a l'1 com a nombre primer hi hauria infinites formes de descompondre cada número (10 seria 2×5 , però també $2 \times 5 \times 1$, $2 \times 5 \times 1 \times 1$, i així successivament). La segona té a veure amb la conjectura feble de Goldbach que estableix, com recordarem a continuació, que tot nombre imparell més gran que cinc es pot expressar com la suma de tres nombres primers. Aquesta conjectura ja va ser demostrada l'any 2013, malgrat que l'article de Helfgott no ha estat publicat encara en cap revista indexada amb revisors. La tercera raó és per la conjectura forta de Goldbach, que estableix que tot nombre parell més gran que 2 es pot escriure com a suma de dos nombres primers. Aquesta conjectura, en canvi, no ha estat demostrada fins ara i la tractarem aquí, amb més especificitat, a la segona part del nostre treball.

En general, la Teoria Analítica dels Nombres, o simplement, la Teoria de Nombres, és la branca de les Matemàtiques que estudia les propietats dels números (en particular els enters) i concretament els naturals (enters positius) com el mínim conjunt que és inductiu. Conté molts problemes que poden ser compresos pels “no matemàtics”, com crec és el cas del que aquí ens ocupa i que es pot considerar com el 8è dels problemes matemàtics del Mil·lenni.

L'any 1912, Landau (1877-1938) va establir al Cinquè Congrés Internacional de Matemàtics² de Cambridge una llista de quatre dels problemes sobre nombres primers, que es coneixen com els “problemes de Landau”. Cap d'ells no està resolt fins ara. Es tracta de la conjectura binària de Goldbach que tractarem

¹ El teorema fonamental de l'aritmètica (o teorema de factorització única) estableix que tot nombre natural té una representació única com a producte de factors primers, llevat de l'ordre. Un mateix factor primer pot aparèixer diverses vegades. Això implica que les funcions aritmètiques additives i multiplicatives estan completament determinades pels seus valors en les potències dels nombres primers. El resultat ja es pot deduir dels *Elements* d'Euclides l'any 300 aC. i va aconseguir la seva formulació definitiva amb K. F. Gauss (1777-1855) l'any 1801. L'1 es representa llavors com un producte buit. La importància d'aquest teorema és una de les raons per excloure l'1 del conjunt dels nombres primers. Si s'admetés l'1 com a nombre primer, l'enunciat del teorema requeriria efectuar aclariments addicionals.

² El **Congrés Internacional de Matemàtics** (*International Congress of Mathematicians, ICM*) és el més important congrés a la comunitat matemàtica. Se celebra cada quatre anys sota els auspicis de la Unió Matemàtica Internacional (IMU). Al congrés de l'any 1900, a París, David Hilbert va anunciar la seva famosa llista de 23 problemes oberts en matemàtiques, ara anomenats els “problemes de Hilbert”. Al congrés del 1998 van assistir 3.346 participants. El programa va constar de 21 hores de lectures plenàries i 169 conferències de 45 minuts sobre temes especialitzats impartides per matemàtics distingits seleccionats pels organitzadors del Congrés. Addicionalment, cada participant podia presentar la feina en 15 minuts d'exposició o bé mitjançant un cartell. Segons l'*American Mathematical Society*, més de 4500 participants van assistir al congrés del 2006 que va tenir lloc a Madrid.

aquí, la dels nombres primers bessons, la de Legendre (1798) i la dels nombres primers de la forma $(n^2 + 1)$.

2. CLASSIFICACIÓ I AMPLIACIONS SUCCESSIVES DEL CONCEPTE DE NOMBRE

Cal destacar, en primer lloc, que el concepte de nombre natural ha estat força ben assimilat pels humans en la majoria de les civilitzacions, essent profusament utilitzat³. Tot i això, totes les ampliacions del concepte de nombre han passat al domini del coneixement de només unes quantes persones al llarg dels anys. Així podem veure, per exemple, que la professió de “canvista” ha revestit una gran importància en tots els temps degut, principalment, a les dificultats aritmètiques que aquestes operacions portaven pel maneig de nombres racionals. Un altre punt a destacar és la posició del jutge entre els àrabs; l'herència, a causa del codi alcorànic, comporta moltes dificultats en la seva divisió i és, per això, que als pobles islàmics aquests jutges ostentaven una posició o rang especial per la facilitat de fer aquest tipus de reparticions (novament apareix aquí la dificultat de treballar amb els nombres racionals).

Aquestes dificultats operatives de les diverses ampliacions del concepte de nombre no han estat superades fins a època molt recent a causa, principalment, de la sistematització de les successives ampliacions. Recordem, com a mostra que aquests problemes no són gaire llunyans, la creació per part de J. Neper (1550-1617) de les seves cèlebres *tauletes*, que són unes veritables anticipacions de les regles de càlcul i les calculadores emprades als segles XX i XXI, perquè els seus contemporanis poguessin realitzar, amb relativa facilitat, els productes i divisions. Per tot això, els conceptes que exposarem a continuació per tal de veure les ampliacions del concepte de nombre són, sens dubte, problemes que, d'una manera o altra, se li hauran presentat a moltes persones al llarg de la història i que, en algunes ocasions, hauran donat lloc a una visió dels números amb un camp d'acció més ampli.

Podem veure l'aparició dels números enters en pensar en un gran magatzem que empaqueta un cert producte. A cada paquet, segons es desviï del pes exacte, se li etiqueta més o menys amb el signe + o el – per indicar el sentit de la desviació, a més d'un determinat nombre per indicar la desviació en magnitud. No obstant això, l'aparició dels nombres enters la podem veure realment en qualsevol etapa del desenvolupament del sistema de registre comptable de dobles comptes o partida doble, a partir del monjo franciscà

³ Un nombre natural és qualsevol dels números que es fan servir per comptar els elements de certs conjunts. Els nombres naturals es representen amb la notació $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{Z}^+$. De dos números veïns, el que es troba a la dreta s'anomena “següent” o “successiu”, per la qual cosa el conjunt dels números naturals és ordenat i infinit. Algunes característiques dels nombres naturals són: a) tot nombre més gran que 1 va després d'un altre nombre natural, b) entre dos nombres naturals sempre hi ha un nombre finit de naturals (interpretació de conjunt no dens), c) donat un nombre natural qualsevol, sempre hi ha un altre natural més gran que aquest (interpretació de conjunt infinit), d) entre un nombre natural i el seu successor no existeix cap altre nombre natural.

renaixentista italià Luca Pacioli (1494), a la seva obra intitulada “De computis et scripturis” (“Dels comptes i les escriptures”)⁴.

En qualsevol moment d'un registre comptable pot passar que, en fer balanç d'aquest registre, a causa de les males o bones gestions productives i comercials, hi hagi pèrdues o guanys, cosa que es reflecteix en nombres enters. Això ens porta a construir el conjunt dels nombres enters pels elements: ... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3... Apareix aquí la primera ampliació del conjunt de nombre natural. Efectivament, aquest conjunt de nombres enters és una ampliació, ja que el conté com a cas particular, ja que els nombres enters poden ser positius i negatius i els nombres enters positius coincideixen, precisament, amb els nombres naturals. Posteriorment, el conjunt dels nombres primers P es constitueix com un subconjunt dels nombres naturals N , de tal manera que, mitjançant ampliacions successives (vegeu Fig. 1) es compleix que: $P \subset N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Els nombres primers absoluts, que seran objecte de tractament en aquest Article, són aquells que només són divisibles entre ells mateixos i l'1, és a dir, que si intentem dividir-los per qualsevol altre número, el resultat no és enter. Així, un número natural i senar p es primer si:

- 1) $p > 1$.
- 2) $\text{Div}(p) = \{1, p\}$.

Per consens, el número 1 no es considera primer. El número 2 és l'únic número primer que alhora és parell. Als nombres naturals que no són primers se'ls anomena “números compostos”, que són els nombres naturals que tenen algun divisor natural a part de si mateixos i de l'1, i, per tant, es poden factoritzar. El número 1 no es considera primer, ja que, en aquest cas, la factorització dels nombres naturals (que constitueix el teorema fonamental de l'aritmètica) no seria única, ja que sempre es pot multiplicar per 1, però tampoc no es considera un nombre compost.

La propietat de ser nombre primer s'anomena “primalitat” o “primeritat”. En la teoria algebraica de nombres, els nombres primers es denominen *nombres racionals primers* per distingir-los dels *nombres gaussians primers*⁵. La primalitat no depèn del sistema de numeració, però sí de l'estructura algebraica d'anell⁶ on s'estudia la primalitat o condició de ser primer. El 2 és un nombre primer racional; no obstant això, posseeix factors com a enter gaussià.

⁴ Es tracta del Títol Novè, Tractat XI de la seva “Summa d'Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita”, editat a Venècia, primer tractat que exposa i divulga el sistema conegut pel nom de “partida doble” sobre el qual es basa el desenvolupament de la comptabilitat fins als nostres dies.

⁵ Els nombres primers gaussians tenen una propietat interessant: cada primer gaussià és un divisor propi d'algun primer enter. És a dir, si q és un primer gaussià, llavors existeix un enter primer p tal que q divideix p (en els enters gaussians). En altres paraules, l'“estructura aritmètica” o “estructura teòrica de números” dels enters gaussians és una versió més detallada de la mateixa estructura en els enters.

⁶ En àlgebra abstracta, un **anell** és qualsevol conjunt R no buit amb dues operacions de composició interna, addició i multiplicació, i amb la primera és un grup abelià i la segona operació associativa i a més distributiva respecte de la primera. Si es dona la situació que la segona operació sigui commutativa se'l

La majoria dels números es comporten d'acord amb regles senzilles i clares. Per contra, els nombres primers són un autèntic incordi: apareixen on volen, sense cap avís previ, d'una forma aparentment caòtica, i sense seguir cap mena de pauta. I el pitjor del cas és que no es poden ignorar: han estat objecte de multitud d'estudis en la matemàtica i resulten fonamentals en la criptografia. L'enigma dels nombres primers rau, bàsicament, en el fet que no es reconeix encara un patró (lleï de formació o terme general) i no resulta possible saber quin serà el nombre primer següent a un nombre primer donat.

Aquests nombres primers, com assenyala encertadament A. Enríquez Vanderkan, posseeixen diverses particularitats, algunes de les quals són:

1a) Un nombre natural més gran que 3 és primer si la seva arrel quadrada és un nombre decimal (no enter) i si no és divisible per cap nombre primer menor o igual a l'enter de l'arrel quadrada. Això constitueix la base de l'algorisme per determinar si un nombre enter és primer o no.

2a) Tots els nombres primers són imparells a excepció del 2, per tant, el seu últim dígit és 1, 3, 7 o 9. El 5 no està inclòs en aquesta llista ja que, encara que és imparell i primer, mai és la xifra final d'un altre nombre primer. De fet, tots els números que acaben en 5 són múltiples d'aquest i, en conseqüència, no són primers. Tots els números naturals que acaben en 0 són divisibles entre 5 també, per la qual cosa tampoc seran primers.

3a) El parell (2,3) està format pels únics nombres primers consecutius.

4a) Una "llacuna" de nombres no primers és un segment dels nombres naturals on no hi ha inserit cap nombre primer. Es poden construir llacunes de nombres no primers o compostos entre nombres primers, de mides tan grans com desitgem.

5a) Els divisors propis d'un nombre natural són els nombres naturals que el poden dividir, i resulta de quocient un altre nombre natural i de resta 0, és a dir, la divisió és exacta. Cada número té una quantitat concreta de divisors. Dos nombres naturals diferents són "amics" si cadascun d'ells s'obté sumant els divisors propis de l'altre.

6a) Un nombre primer p no és amic de cap nombre m més gran que 1. Com que en ser p primer té exactament un divisor propi, l'1 i, per tant, la suma dels divisors propis de p és 1 diferent de m . Els números primers, doncs, no tenen amics.

7a) Els nombres primers de la forma $(4n + 1)$ són igual a la suma de dos quadrats perfectes; per la qual cosa no són nombres gaussians primers. En tant que els nombres primers de la forma $(4n + 3)$ sí que són nombres

nomena *anell commutatiu* i si hi hagués un element identitat o neutre per a la segona operació s'anomena *anell unitari*. Per al cas, l'anell dels quaternis (que són una extensió dels nombres reals similar a la dels nombres complexos) és un anell unitari i no commutatiu i l'anell dels sencers parells és un anell commutatiu sense unitat. El concepte d'anell sorgeix al segle XIX i generalitza les propietats dels nombres enters. La paraula "anell" sembla haver estat introduïda per David Hilbert (1862-1943).

gaussians primers. Tot nombre enter primer és un nombre gaussià enter, sense ser necessàriament nombre gaussià primer.

8a) Els nombres primers “bessons” són aquells als quals els separa una diferència de nombre parell, el número 2, que també és primer. Per exemple: (3,5), (5,7), (11,13). Aquests dos nombres primers es diferencien en dues unitats. La taula 1, que s'exposa a continuació, facilita l'elaboració d'un algorisme per trobar nombres primers bessons. No s'ha pogut demostrar si hi ha infinites parelles de nombres primers bessons o bé si són finites. En efecte, si observem les 15 parelles de nombres primers bessons continguts en els primers 200 números naturals que apareixen a la taula 1, es té:

Taula 1. Nombres primers bessons dels primers 200 naturals.

Parella de primers bessons	Suma	Producte	Producte +1	Representació potencial del Producte +1
3 i 5	8	15	16	4^2
5 i 7	12	35	36	6^2
11 i 13	24	143	144	12^2
17 i 19	36	323	324	18^2
29 i 31	60	899	900	30^2
41 i 43	84	1763	1764	42^2
59 i 61	120	3599	3600	60^2
71 i 73	144	5183	5184	72^2
101 i 103	204	10403	10404	102^2
107 i 109	216	11663	11664	108^2
137 i 139	276	19043	19044	138^2
149 i 151	300	22499	22500	150^2
179 i 181	360	32399	32400	180^2
191 i 193	384	36863	36864	192^2
197 i 199	396	39203	39204	198^2

Curiosament, si a la darrera columna d'aquesta taula multipliquem la xifra de l'exponent per la base obtindrem la columna de la “Suma”, mentre que aquesta base és la mitjana aritmètica de la parella de bessons en qüestió. La columna “Producte + 1” continuaria així: 51984 (227 i 229), 57600 (239 i 241), 72900 (269 i 271), 79524 (281 i 283), 97344 (311 i 313), 121104 (347 i 349), 176400 (419 i 421), 186624 (431 i 433), 213444 (461 i 463), 272484 (521 i 523), 324900 (569 i 571), 360000 (599 i 601), 381924 (617 i 619), 412164 (641 i 643), 435600 (659 i 661), 656100 (809 i 811), 675684 (821 i 823), 685584 (827 i 829), 736164 (857 i 859), ..., i les arrels quadrades permeten identificar successivament las parelles de primers bessons (entre parèntesis). Veure nota explicativa al final del present article (*).

9a) Els nombres primers entre sí o nombres primers relatius són dos o més nombres que no tenen cap més divisor comú que 1. El major divisor comú o màxim comú divisor (m.c.d.) de diversos nombres primers entre sí és 1. Així, 8 i 15 son primers entre sí o primers relatius perquè el seu únic factor comú és 1, perquè 8 és divisible per 2, però 15 no, i 15 és divisible per 3 i per 5, però 8 no.

Els números 7, 12 i 15 són primers entre sí perquè 7 no divideix a 12 ni a 15; 2 divideix a 12, però no a 7 ni a 15; 3 divideix a 12 i a 15, però no a 7; 5 divideix a 15, però no a 7 ni a 12; consegüentment, el seu únic divisor comú és 1. Tanmateix, 12, 14 i 18 no són primers entre sí perquè 2 els divideix a tots.

Cal observar que, per tal que dos o més números siguin primers entre sí, no és pas necessari que siguin primers absoluts. Així, 8 no és primer, 15 tampoc, i no gensmenys, són primers entre sí; 7 és primer, 12 no ho és i 25 tampoc i són primers entre sí. Ara bé, si dos o més nombres són primers absoluts cadascun d'ells, evidentment seran primers entre sí. Una classificació il·lustrativa sobre els diferents tipus de números, on se situen els primers que estem tractant aquí, es pot veure a continuació:

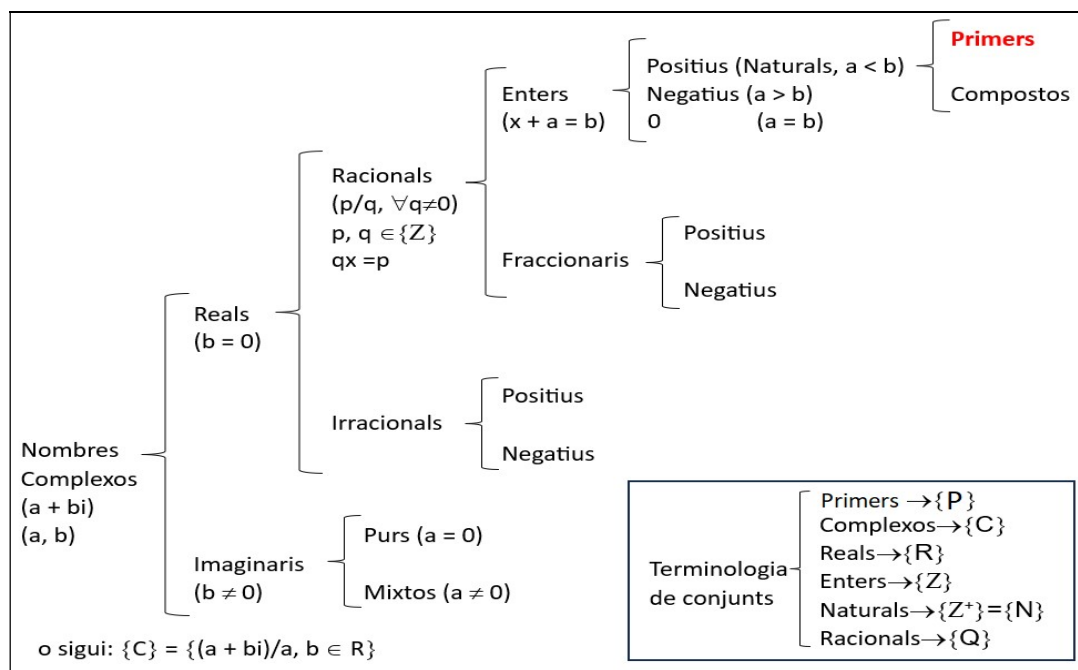


Fig. 1. Ampliacions successives del concepte de número.

Un altre tema relacionat, que jutgem de particular interès, fa referència als conceptes de “simulació” i “models matemàtics”, que es fan servir per a l'anàlisi de diferents fenòmens econòmics, meteorològics, mèdics i sociològics. Descartes ja semblava entreveure, per primer cop, la noció general d'isomorfisme⁷ (que ell anomenava “semblança”) i la possibilitat d'identificar relacions o operacions isomorfes; va posar com a exemples els de l'addició i la multiplicació. Tot i això, aquestes idees agosarades no van tenir cap ressò entre els seus contemporanis i caldria esperar fins al gran desenvolupament de

⁷ En matemàtiques, un **isomorfisme** (del grec *iso-morfs*: igual forma) és un homomorfisme (que és una funció entre dues estructures algebraïques que preserva les operacions definides en aquestes estructures, o més generalment un morfisme) que admet un invers. El concepte matemàtic d'**isomorfisme** pretén captar la idea de tenir la mateixa estructura. Dues estructures matemàtiques entre les quals hi ha una relació d'isomorfisme s'anomenen **isomorfes**. L'interès dels isomorfismes rau en el fet que dos objectes isomorfs tenen les mateixes propietats (excloent-ne informació addicional com l'estructura o els noms dels objectes). Així, les estructures isomorfes no es poden distingir des del punt de vista de l'estructura únicament, i es poden identificar.

l'àlgebra de mitjans del segle XIX per entreveure el començament de la materialització dels somnis cartesians.

És precisament en aquest moment històric quan els models es multipliquen i s'acostuma a passar d'una teoria a una altra mitjançant un simple canvi de llenguatge. Mitjançant el descobriment de les coordenades homogènies⁸ l'any 1837, Möbius (1790-1868) no només va poder entendre les nocions fonamentals de punts impropis i imaginaris introduïts per Poncelet (1788-1867) i apreciar en tot el seu valor, juntament amb Gergonne (1771-1859), Plücker (1801-1868) i Chasles (1793-1880), el principi de la dualitat, sinó que va poder donar un tractament complet de l'invariant fonamental de la geometria projectiva: la "raó doble" de quatre punts alineats.

L'ús, cada cop més estès, de la noció de "model" permetria, al mateix segle, dur a terme la unificació de les matemàtiques somiada pels pitagòrics. Només quedaven a part els nombres enters com a "productes exclusius del nostre esperit", tal com els definia Gauss el 1832, oposant-los a la noció d'espai. No obstant això, a finals del segle XIX, els nombres enters i els nombres primers continguts en ells passen a ser una part fonamental de totes les matemàtiques clàssiques. Els models basats en l'aritmètica van adquirint més importància amb l'extensió del mètode axiomàtic i la concepció dels objectes matemàtics com a creacions lliures, prodigioses i admirables de l'esperit humà.

3. AMISTAT AMB UN GENI ANOMENAT EULER

El matemàtic prussià Christian Goldbach (1690-1764), havia nascut a Königsberg, Brandenburg-Prusia, actual Kaliningrad, Rússia. Va estudiar lleis, idiomes i matemàtiques. Va fer diversos viatges a través d'Europa i va conèixer diversos matemàtics famosos, com ara Gottfried Leibniz, Leonhard Euler i Daniel Bernoulli. El 1725, es va convertir en historiador i professor de matemàtiques a Sant Petersburg. Tres anys més tard, es va traslladar a Moscou per treballar per al tsar Pere II de Rússia. Va realitzar importants treballs en el camp de les matemàtiques, però avui dia és conegut per l'anomenada "conjectura de Goldbach" o "conjectura forta de Goldbach". També va estudiar i va demostrar diversos teoremes sobre potències perfectes. La "conjectura forta de Goldbach" ha estat verificada per a tots els números parells menors que 4×10^{14} per Joerg Richstein (1998).

La "conjectura feble de Goldbach" fou resolta el 2013 pel matemàtic peruà Harald Andrés Helfgott, que va aconseguir demostrar que per a tot nombre imparell més gran que 10^{30} la conjectura és certa. Després, amb l'ús d'un potent ordinador, va verificar que cada nombre imparell menor a 10^{30} (o fins i tot 8.875×10^{30}) podia expressar-se com la suma de tres nombres primers.

⁸ En geometria projectiva, les coordenades homogènies són un instrument emprat per a descriure un punt a l'espai projectiu. També poden utilitzar-se com un sistema alternatiu de coordenades per a treballar a l'espai euclidià, ja que aquest pot considerar-se com un subconjunt de l'espai projectiu. D'aquesta manera, les coordenades homogènies són àmpliament emprades en infografia per a la representació d'escenes en tres dimensions.

Goldbach va plantejar per carta, datada el 7 de juny de 1742 (que inclou temes estrictament matemàtics i alguns assumptes personals que involucraven personatges de la cultura francesa, alemanya, italiana i russa) la seva famosa conjectura sobre els números primers al seu amic Euler⁹, una mica més jove que ell, que aquest no la va poder resoldre. Cal tenir en compte que L. Euler (1707-1783), probablement un dels tres majors matemàtics de la Història moderna (al costat de Gauss i Riemann) és autor de la considerada, per molts tractadistes, com “la més bella fórmula de les Matemàtiques” (malgrat que vuit anys abans també la va esmentar Roger Cotes en la seva expressió logarítmica, denominada com a “nostra joia” pel físic Richard Feynman), que estableix la relació existent entre les funcions trigonomètriques i la funció exponencial complexa per a qualsevol nombre real x , a saber :

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \quad \text{que, confirma la identitat trigonomètrica:}$$

$$1 = (\cos x + i \cdot \sin x) \times (\cos x - i \cdot \sin x) = \cos^2 x - i^2 \cdot \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

que, amb $x = \pi$ radians = 180° sexagesimals, es converteix en:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \text{ (“identitat d’Euler”).}$$

4. LA INFINITAT DELS NOMBRES PRIMERS

El cardinal del conjunt dels nombres primers és infinit numerable, per la qual cosa el nombre de sumes binàries que es poden realitzar entre ells també ho és, i el resultat serà sempre un nombre parell ja que es tracta de l'addició de dos nombres imparells. D'aquí es dedueix que es poden formar infinits nombres parells N però, *a priori*, això no implica que tots els N es poden expressar necessàriament com a suma de dos nombres primers i no es constitueix aquí la locució llatina *per se et essentialiter*, en la conjectura forta de Goldbach que estem analitzant.

Existeixen nombroses demostracions envers la infinitat dels nombres primers. Així, en un interessant *paper* d'Amo *et alt.* (2013) es recullen moltes d'elles, amb la seva autoria i desenvolupament. Concretament, per ordre cronològic, les d'Euclides (300, a.C., en el llibre IX de la seva obra *Elements*), Goldbach (1730-1742), Euler (1737), Kummer (1878), Perrot (1881), Stieltjes (1890), Thue (1897), Braun (1897), Auric (1915), Metrod (1917), Pólya (1938), Fürstenberg (1955), Harris (1956), Wunderlich (1965), Dressler (1975), Nair (1982) i altres diverses més recents de Hacks (1983), Pollack (2003), etc. En aquestes demostracions es recullen, com recolzaments, nombrosos conceptes

⁹ Euler va conèixer Goldbach el 1727 -aquell any, la Universitat de Basilea el va rebutjar com a docent- i Nicolau i Daniel Bernoulli el van convidar a formar part de l'Acadèmia de Ciències de Sant Petersburg que estava sota el comandament i cura de Caterina I, que va morir poc abans del trasllat d'Euler a Rússia pel maig de 1727. Per afinitat d'interessos tots dos iniciaren una sòlida amistat i relació professional, constatada en la correspondència que van sostenir des del 1729 fins al 1764. Hi ha prop de dues-centes cartes —almenys les conegudes— amb temes tan variats com teoria dels nombres, sèries, nombres complexos, teoria de funcions, càlcul, etcètera (en 1741 Euler comunicà a Goldbach la seva famosa identitat). S'hi poden trobar les llavors de molts dels resultats que posteriorment Euler publicaria.

matemàtics que no procedeix desenrotllar aquí per comprensibles raons d'espai, com ara recurrències, funcions d'Euler o de Riemann (1859), avaluació euleriana de sèries diverses, números de Fermat i de Fibonacci, topologies, fraccions contínues, formulacions de Legendre (1898) i Stirling, i d'altres.

Pel que es refereix a aquesta darrera formulació (Amo *et alt.*, 2013), veiem que combinant las fórmules de Stirling, $n! \cong e^{n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)}$ i de Legendre, $n! = \prod_p p^{\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots}$ tenim el següent:

$$n^n e^{-n} < n! = \prod_p p^{\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots} \leq \prod_p p^{\frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \dots} = \left(\prod_p p^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots} \right)^n \leq C^n.$$

La desigualtat $n^n e^{-n} < C^n$ és equivalent a $\frac{n}{C} < e$. Això últim només és possible per a un nombre finit de valors de n . Per aquesta raó, concloem que el número de nombres primers és infinit.

Altra demostració semblant té lloc emprant la fórmula de Legendre, amb la qual cosa tenim l'expansió en sèrie de $(2n!)/(n!)^2$, en $n = 0$, mitjançant la sèrie de Taylor:

$$1 + \frac{\pi^2 n^2}{6} + n^3 \psi^{(2)}(1) + \frac{19 \pi^4 n^4}{360} + O(n^5)$$

on $\psi^{(n)}(x)$ és l' n -èsima derivada de la funció digamma.

I, d'altra banda, en $n = \infty$:

$$4^n \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}}{8\sqrt{\pi}} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}}{128\sqrt{\pi}} + \frac{5\left(\frac{1}{n}\right)^{7/2}}{1024\sqrt{\pi}} - \frac{21\left(\frac{1}{n}\right)^{9/2}}{32768\sqrt{\pi}} - \frac{399\left(\frac{1}{n}\right)^{11/2}}{262144\sqrt{\pi}} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^6\right) \right)$$

amb la qual cosa tenim:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\prod_p p^{\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \dots}}{\prod_p p^{2\left[\frac{n}{p}\right] + 2\left[\frac{n}{p^2}\right] + 2\left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots}} = \\ &= \prod_p p^{\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] - 2\left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots} = \prod_p p^{\log_p(2n)} \leq \prod_p 2n = 2^r n^r \end{aligned}$$

Si apliquem la fórmula de Stirling al primer terme, tenim que, per a valors grans de n , $2^n = O(n^r)$. Però això només és possible per a un nombre finit de valors de

n. Deduïm, aleshores, que el cardinal del conjunt dels nombres primers és infinit.

Altres matemàtics han demostrat la infinitud dels nombres primers amb diversos mètodes procedents de diverses àrees de les matemàtiques com ara l'àlgebra commutativa i la topologia. Algunes d'aquestes demostracions es basen en l'ús de successions infinites amb la propietat que cadascun dels seus termes és coprimer amb tots els altres, per la qual cosa es crea una bijecció (aplicació bijectiva, és a dir, injectiva i suprajectiva o sobrejectiva simultàniament) entre els termes de la successió i un subconjunt (infinit) del conjunt dels nombres primers.

Una successió que compleix aquesta propietat és la successió d'Euclides-Mullin, que deriva de la demostració euclidiana de la infinitud dels nombres primers, ja que cadascun dels seus termes es defineix com el factor primer més petit d'un més el producte de tots els termes anteriors. La successió de Sylvester¹⁰ es defineix de manera similar, ja que cadascun dels seus termes és igual a 1 més el producte de tots els anteriors. Encara que els termes d'aquesta darrera successió no són necessàriament tots primers, cadascun és coprimer amb tots els altres, per la qual cosa es pot escollir qualsevol dels seus factors primers, per exemple, el menor, i el conjunt resultant serà un conjunt infinit dels termes del qual són tots primers.

5. CONVERGÈNCIA I DIVERGÈNCIA DE SÈRIES I RECÍPROCS DELS NOMBRES PRIMERS

Per cert, quant a l'aplicabilitat de la formulació del matemàtic escocès J. Stirling (1692-1770) que referíem al punt anterior, de gran utilitat per al càlcul de límits de successions de nombres reals i de la qual es fan ressò algunes de les més recents demostracions sobre la infinitat dels nombres primers, com hem vist, anem a exemplificar l'estudi de la convergència o caràcter de la sèrie de nombres enters positius de terme general:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

La coneguda fórmula de Stirling ve donada per l'expressió:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$$

d'on s'obté l'equivalència, de gran utilitat: $n! \approx e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}$.

¹⁰ La successió de nombres enters de Sylvester s'anomena així en honor de James Joseph Sylvester (1814-1897), qui la va investigar per primera vegada el 1880. Els seus termes creixen de forma doblement exponencial, i la suma dels seus inversos constitueix una sèrie de fraccions unitàries que convergeix a 1 més ràpidament que cap. La manera com es defineix permet que els seus termes es factoritzin més fàcilment que altres números del mateix ordre de magnitud, però, a causa del ritme de creixement dels mateixos, només es coneix la factorització completa en factors primers d'uns pocs termes. Els termes d'aquesta successió també han tingut usos a la representació finita de fraccions egípcies de suma 1, així com a les varietats sasakianes i les d'Albert Einstein (1879-1955).

Més exactament la fórmula és així:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \dots}$$

on el darrer terme del producte del segon membre (l'exponencial) tendeix a 1 quan n tendeix a infinit.

La llista dels numeradors és: 1, -1, 1, -1, 1, -691, 1, -3617, 43867, -174611, ..., alternativament positius i negatius.

La llista dels denominadors és: 12, 360, 1260, 1680, 1188, 360360, 156, 122400, 244188, 125400, ...

Desenvolupant aquest últim terme també es pot reescriure la fórmula com:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right).$$

Una acotació de la fórmula és:

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

Per exemple, operant amb el nombre primer $p = n = 29$, s'obté:

$$29! = 8\,841\,761\,993\,739\,701\,954\,543\,616$$

$$e^{\frac{1}{12 \cdot 29+1}} = 1.002869438\dots$$

$$e^{\frac{1}{12 \cdot 29}} = 1.002877696\dots$$

$$29! = \sqrt{2\pi 29} \cdot \left(\frac{29}{e}\right)^{29} \cdot 1.002877577\dots$$

Una expressió alternativa emprant la funció gamma d'Euler-Legendre¹¹ és:

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-x} \cdot dx ,$$

que mitjançant l'oportú canvi de variable ($x = n \cdot y$) i integrant per parts condueix a:

¹¹ En matemàtiques, la funció gamma és una aplicació que estén el concepte de factorial als números reals i complexos. De fet, la funció gamma estén el concepte de factorial a qualsevol valor complex de z . La funció gamma apareix en varies funcions de probabilitat, per la qual cosa és prou usada tant en probabilitat i estadística como en combinatòria.

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{n \cdot \ln x - x} \cdot dx = n \int_0^{+\infty} e^{n \cdot \ln ny - ny} \cdot dy = n \int_0^{+\infty} e^{n(\ln ny - y)} \cdot dy = \\ = n \int_0^{+\infty} e^{n(\ln n + \ln y - y)} \cdot dy = e^{n \cdot \ln n} \cdot n \int_0^{+\infty} e^{n(\ln y - y)} \cdot dy.$$

Aplicant el mètode de Laplace s'obté:

$$\int_0^{+\infty} e^{n(\ln y - y)} \cdot dy \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot e^{-n}, \text{ d'on: } n! \approx e^{n \cdot \ln n} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, \text{ c.v.d.}$$

La fórmula en qüestió resulta força útil a diverses àrees com ara la mecànica estadística, on apareixen algunes equacions que contenen factorials del nombre de partícules¹² (en el nostre cas de gotetes d'aigua, com veurem posteriorment al final de la part II). Com que els sistemes macroscòpics típics tenen de l'ordre del famós número del científic italià Avogadro (aproximadament resulta ser: $N_A = 6 \times 10^{23}$) de partícules, la fórmula de Stirling esdevé, a la pràctica, exacta. A més, la fórmula de Stirling és diferenciable, cosa que permet el càlcul molt aproximat dels punts crítics de la funció corresponent, com els extrems absoluts i relatius o locals (màxims i mínims), punts d'inflexió, intervals de creixement, decreixement, concavitat, convexitat, etc., en expressions que contenen factorials.

Es tracta, ahora, d'estudiar, com a curiositat, la convergència de la sèrie que conformarem amb els 5 primers nombres primers de terme general:

$a_n = \frac{n!}{n^n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, amb la seva corresponent expansió en sèrie¹³:

$$e^{-n} \left(\sqrt{2\pi} \sqrt{n} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{1}{144} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} - \frac{139 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}}{25920} - \frac{571 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{7/2}}{1244160} + \frac{163879 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{9/2}}{104509440} + \frac{5246819 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{11/2}}{37623398400} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{13/2}\right) \right)$$

¹² Des de la revisió efectuada a la 26a Conferència General de Pesos i Mesures (CGPM), celebrada l'any 2018, la **constant d'Avogadro** (símbols: L , N_A) té un valor exacte definit com $6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. El **nombre d'Avogadro** equival a la quantitat de $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ expressada en notació científica, és a dir, 602 214 076 000 000 000 000 000 (sis-cents dos mil dos-cents catorze trilions setanta-sis mil bilions gotes d'aigua superficial del planeta Terra o al nombre d'astres de l'univers, com s'explica posteriorment en aquest mateix article). La constant de l'eminent fisicoquímic Avogadro és el factor de proporcionalitat existent entre el nombre de partícules o entitats elementals i la quantitat de substància. En dividir la quantitat d'entitats elementals, siguin quines siguin, entre la constant d'Amedeo Avogadro (1776-1856) s'obté, en definitiva, la quantitat de substància.

¹³ En matemàtiques, una expansió en sèrie és un mètode per calcular una funció que no pot ésser expressada només mitjançant operadors elementals (suma, resta, multiplicació i divisió). La sèrie resultant sovint es pot limitar a un nombre finit de termes, donant com a resultat una aproximació de la funció expandida. Com menys termes de la seqüència es facin servir, més simple resultarà aquesta aproximació. Amb freqüència, la inexactitud resultant (és a dir, la sèrie dels termes omesos) es pot descriure mitjançant una equació que involucra una cota superior asimptòtica.

Resulta una sèrie numèrica descendent i aconpleix, como es veu, la condició necessària, però no suficient, de convergència.

Aquest mateix problema pot, també, resoldre's per aplicació de la fórmula de Stirling, amb la qual cosa el terme general de la sèrie restarà així:

$$a_n \approx \frac{e^{-n} \times n^n \times \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}.$$

Aplicant, ara, el primer criteri de Cauchy, quedarà:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2\pi n}}{e} = \frac{1}{e} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2\pi n} =$$

(aplicant també el criteri de Stolz de l'arrel, ja que és una indeterminació del tipus ∞^0)

$$= \frac{1}{e} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-2(n-1)]{\frac{2\pi n}{2\pi(n-1)}} =$$

$$= \frac{1}{e} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{e} \times \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1}} = \frac{1}{e} \times 1 < 1 \rightarrow \text{CONVERGENT, c.v.d.}$$

Alternativament, aplicant el criteri de D'Alembert¹⁴ o del quocient, es té:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{n^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1, \end{aligned}$$

i aleshores la sèrie reafirma el seu caràcter CONVERGENT. El mateix podria demostrar-se per aplicació d'altres diferents criteris usuals, com ara el 2n criteri de Cauchy (o del logaritme), el de Pringsheim, el de Gauss (per comparació de sèries), el de Raabe-Rolf o el de Cauchy $2^n \cdot a_2^n$ o "condensació" per a sèries decreixents.

¹⁴ Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) fou un matemàtic i filòsof francès. Se'l considera un dels màxims exponents del moviment il·lustrat, concebut les Ciències com un tot integrat i una eina per al progrés de la Humanitat. Va abordar la Matemàtica a través de la Física, amb el problema dels tres cossos. Això el va portar a estudiar les equacions diferencials ordinàries i en derivades parcials. També va provar un criteri de convergència per a sèries que és el que justament hem aplicat aquí.

En tot cas, tractant-se d'una sèrie positiva resulta aplicable el criteri del "test-integral", a saber:

$$a_n = f(n) = \frac{n!}{n^n}, \text{ i prenem: } f(x) = \frac{x!}{x^x}.$$

En el interval $x > 1$, $f(x) > 0$, i la suma és decreixent. Considerant $\xi = 1$ com a límit inferior de l'interval d'integració, es té:

$$\int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{x!}{x^x} dx = \left[x + \frac{1}{4} x^2 (-2 \ln(x) - 2\gamma + 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{108} x^3 (18 \ln^2(x) + 36\gamma \ln(x) - 12 \ln(x) + 3\pi^2 + 18\gamma^2 - 12\gamma + 4) + O(x^4) \right]_1^{+\infty} = 1.33057 \dots$$

Resolent-ho, doncs, com expansió en sèrie generalitzada de Puiseux de la integral en $x = 0$, essent γ la constant d'Euler-Mascheroni, veure nota explicativa al final del present article (**). Així, efectivament, la sèrie és convergent.

Això pot comprovar-se també mitjançant l'aproximació de Stirling:

$$n! = e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}; \text{ d'on es dedueix que:}$$

$$f(n) = \frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}, \text{ o sigui: } f(x) = \frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x}. \text{ Aleshores:}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx = \sqrt{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \cdot dx = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{e} + 0.1394 \dots \right) = \\ = 2.51(0.3678 \dots + 0.1394 \dots) = 2.51 \times 0.50728 = 1.27327 \dots,$$

que no modifica la conclusió ja obtinguda respecte al caràcter de la sèrie estudiada però que conforma un resultat proper a l'anteriorment trobat, amb un error absolut de:

$$E_A = 1.33057 - 1.27327 = 0.0573, \text{ i relatiu de:}$$

$$E_R = \frac{0.0573 \times 2}{1.33057 + 1.27327} \times 100 = \frac{0.1146}{2.60384} \times 100 = 4.4\%.$$

Aquestes diferències poden ésser explicades tant per la pròpia aproximació de Stirling como per les operacions realitzades de l'ajustament decimal. Determinant l'esmentat error relatiu pel mètode més tradicional, es té:

$$E_R = \frac{0.0573}{1.33057} \times 100 = 4.3\%.$$

Així mateix, emprant ara els 5 primers nombres primers, es pot també formar la sèrie descendent: $\{p_i\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots\}$, o sigui:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = 2 \Rightarrow \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} = 0.50000 \\ p_2 = 3 \Rightarrow \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9} = 0.22222 \\ p_3 = 5 \Rightarrow \frac{5!}{5^5} = \frac{120}{3125} = 0.03840 \\ p_4 = 7 \Rightarrow \frac{7!}{7^7} = \frac{5040}{823\,543} = 0.00612 \\ p_5 = 11 \Rightarrow \frac{11!}{11^{11}} = \frac{39\,916\,800}{285\,311\,670\,611} = 0.00014 \\ \dots \end{array} \right.$$

i resulta la sèrie numèrica descendent de termes positius:

$$0.5, 0.22222, 0.0384, 0.00612, 0.00014, 0.00002, \dots$$

També, a l'esmentat treball (Amo *et al*, 2013), es presenta una completa disquisició envers el caràcter de la sèrie dels recíprocs o inversos dels nombres primers, que resulta ser divergent. En general, aquests autors realitzen una exposició recopilatòria de demostracions d'altres investigadors.

De fet, es té la sèrie formada pels recíprocs dels nombres primers:

$$\sum_{p_n} \frac{1}{p_n} = \sum_{p_n} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots \right) = \ln \ln(+\infty) \rightarrow \infty,$$

i Euler arribà a la conclusió que és divergent. Apart de la demostració que podríem considerar "original" deguda a Euler, existeixen altres diverses demostracions que no ressenyarem aquí per la seva considerable extensió i proximitat (Erdős [14], Mixon, Oresme, Edwards i Penney [13], Dux [12], Bellman [3], Moser [33], Pinasco, Clarkson [8], ...), potser exceptuant la basada en la desigualtat de Dusart (1998), que indica que $\forall n \geq 6$, s'acompleix per als nombres primers tal que: $p_n \in P$, $p_n < n \times \log n + n \times \log \log n$, que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \geq \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{p_n} \geq \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n \times \log n + n \times \log \log n} = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{2n \log n} = \infty, \text{ que divergeix.}$$

Aplicant ara el criteri del test-integral (Cauchy – McLaurin)¹⁵ a la sèrie de l'esquerra, s'obté: $f(x) = \frac{1}{x}$. A l'interval $x > 1$, $f(x) > 0$, i la sèrie és decreixent.

Aleshores, prenent $\xi = 1$ com a límit inferior de l'interval d'integració, es té:

¹⁵ Aquesta prova és del tipus de comparació encara que, en aquest cas, la comparació es fa entre una integral definida i una sèrie, en lloc d'entre dues sèries. El criteri de la integral per a series diu que si

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{+\infty} = \infty - 0 = \infty,$$

i la sèrie en qüestió és divergent.

Per últim, el criteri de Pringsheim (1850-1941) o del producte també resulta d'aplicació al cas, ja que ofereix:

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} (p_n)^\alpha \times \frac{1}{p_n} = (\text{con } \alpha = 1) = 1 \neq 0,$$

i com resulta que: $\alpha \leq 1$, la sèrie és divergent, c.v.d.

6. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DELS NOMBRES PRIMERS

6.1. Continguts en els primers 200 números naturals

El tractament estadístic del problema plantejat no resulta gaire habitual d'aplicació en la Teoria de Nombres, però creiem que pot resultar útil i aportar una visió alternativa o complementària.

Es presenta i assenjala la taula 2 dels 46 números primers continguts en la mostra dels primers 200 números naturals. Així:

Taula 2. Nombres primers (1 a 200).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

tenim $f(x)$, que és una funció continua, positiva i decreixent a l'interval comprés entre k i ∞ , i $f(n)$ és igual a a_n ; aleshores, primer, si la integral des de k fins ∞ de $f(x)$ respecte a x és convergent, la sumatòria des de n igual a k fins ∞ de a_n , també ho és. I en segon lloc, si la integral des de k fins ∞ de $f(x)$ respecte a x és divergent, la sumatòria des de n igual a k fins ∞ de a_n , també ho és.

A continuació, es formen les sumes de 2 nombres primers per tal de configurar els números parells naturals N de l'1 al 200.

Taula 3. Formació de números parells naturals N per l'adició de 2 nombres primers (1 a 200).

N	p_1+p_2	N	p_1+p_2	N	p_1+p_2	N	p_1+p_2	N	p_1+p_2
2	--	42	5+37	82	3+79	122	13+109	162	5+157
4	2+2	44	7+37	84	5+79	124	11+113	164	7+157
6	3+3	46	3+43	86	3+83	126	13+113	166	3+163
8	3+5	48	5+43	88	5+83	128	19+109	168	5+163
10	3+7	50	3+47	90	7+83	130	3+127	170	3+167
12	5+7	52	5+47	92	3+89	132	5+127	172	5+167
14	3+11	54	7+47	94	5+89	134	3+131	174	7+167
16	3+13	56	3+53	96	7+89	136	5+131	176	3+173
18	5+13	58	5+53	98	19+79	138	7+131	178	5+173
20	3+17	60	7+53	100	3+97	140	3+137	180	7+173
22	3+19	62	3+59	102	5+97	142	3+139	182	3+179
24	5+19	64	3+61	104	3+101	144	5+139	184	3+181
26	3+23	66	5+61	106	3+103	146	7+139	186	5+181
28	5+23	68	7+61	108	5+103	148	11+137	188	7+181
30	7+23	70	3+67	110	3+107	150	11+139	190	11+179
32	3+29	72	5+67	112	3+109	152	3+149	192	11+181
34	3+31	74	3+71	114	5+109	154	3+151	194	3+191
36	5+31	76	3+73	116	3+113	156	5+151	196	3+193
38	7+31	78	5+73	118	5+113	158	7+151	198	5+193
40	3+37	80	7+73	120	7+113	160	3+157	200	3+197

Els primers números parells que acabem de comprovar, no només són representables com a suma de dos nombres primers, si més no que el número de representacions de N com a suma de dos primers sembla créixer amb N. Això és degut, entre altres raons, a què els nombres primers són infinits, com hem vist a l'apartat anterior 4 d'aquest mateix treball.

6.2. Continguts en els primers 1000 números naturals

És possible elaborar la següent taula dels 168 números primers continguts en la mostra dels primers 1000 números naturals:

Taula 4. Distribució dels nombres primers continguts en els 1000 primers naturals.

L	p_i	$P_i \uparrow$	$P_i \downarrow$	f_i	$F_i \uparrow$	$F_i \downarrow$	x_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
1-100	25	25	143	0.149	0.149	0.851	50	1250	2500	62500
100-200	21	46	122	0.125	0.274	0.726	150	3150	22500	472500
200-300	16	62	106	0.095	0.369	0.631	250	4000	62500	1000000
300-400	16	78	90	0.095	0.464	0.536	350	5600	122500	1960000
400-500	17	95	73	0.101	0.566	0.434	450	7650	202500	3442500
500-600	14	109	59	0.083	0.649	0.351	550	7700	302500	4235000
600-700	16	125	43	0.095	0.744	0.256	650	10400	422500	6760000
700-800	14	139	29	0.083	0.828	0.172	750	10500	562500	7875000
800-900	15	154	14	0.089	0.917	0.083	850	12750	722500	10837500
900-1000	14	168	0	0.083	1.000	0.000	950	13300	902500	12635000
TOTAL Σ	168	--	--	1.000	--	--	--	76300	--	49280000

Tot seguit, es dedueix l'histograma corresponent de rectangles juxtaposats en ordre a llur magnitud decreixent:

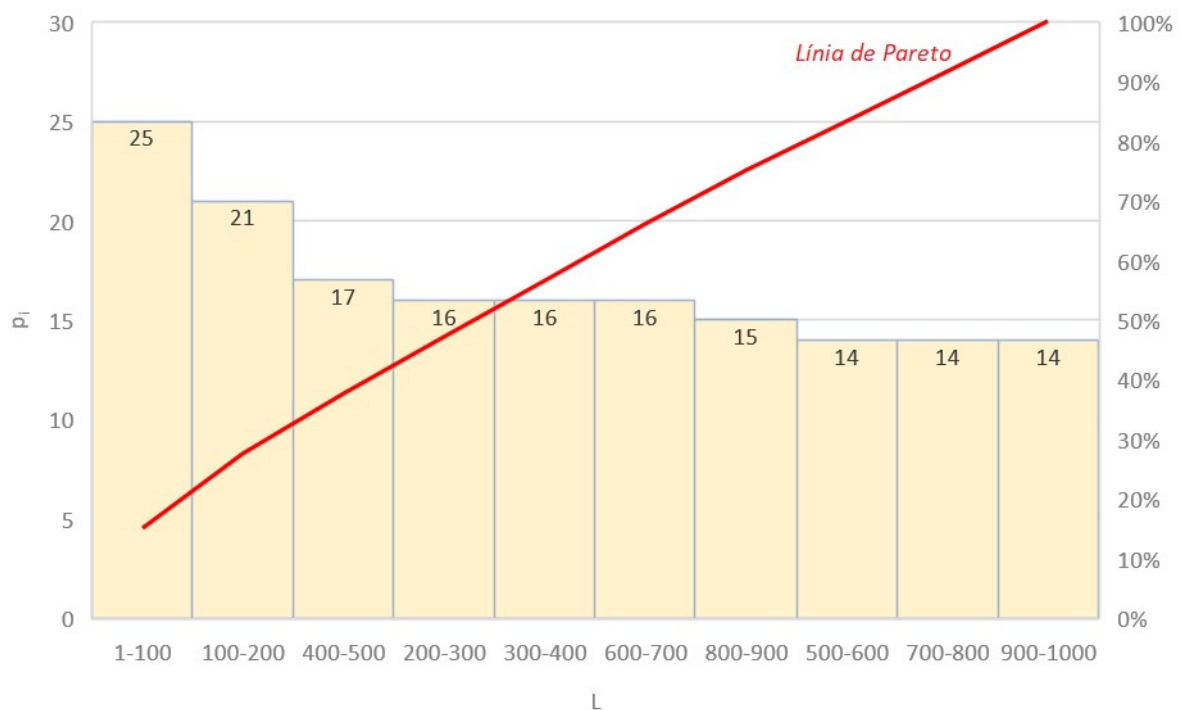


Fig. 2. Histograma de rectangles juxtaposats (1-1000).

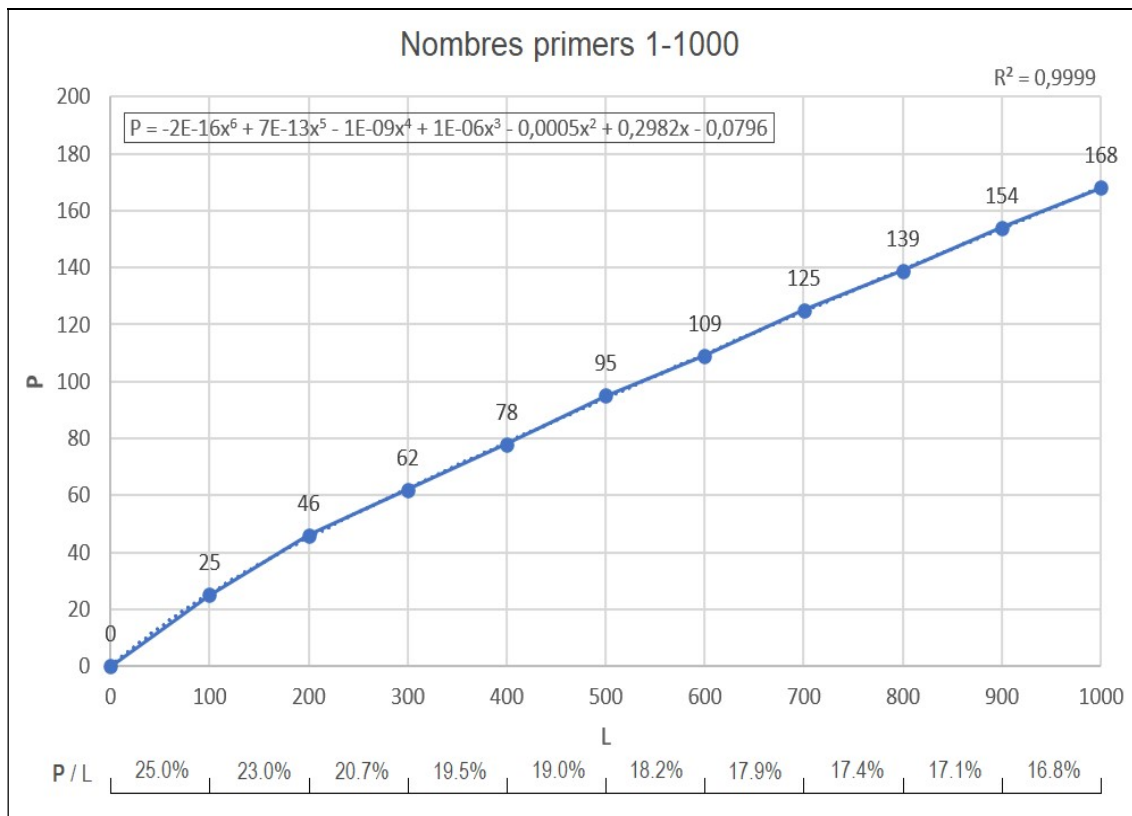


Fig. 3. Diagrama acumulatiu ascendent (1-1000).

L'ajust MQ a una paràbola de 6è grau és pràcticament perfecte, ja que el coeficient de correlació no lineal és $r \cong 1$, encara que per la pròpia forma de la corba, en aquest cas, sembla més interpretable una regressió lineal. D'altra banda, els coeficients de les potències de 2 a 6 són excessivament petits. Això s'assembla més a una interpolació (mitjançant els polinomis de Newton o de Lagrange del càlcul numèric) que no pas a la metodologia d'Estadística i Teoria de la Probabilitat.

La correlació pressuposa la linealitat entre les variables del problema plantejat. Per tal de comprovar la relació existent entre variables no lineals, podem jerarquitzar les variables i fer servir una prova de correlació lineal. El coeficient de correlació de Spearman només funciona si les variables tenen una relació monòtona. És preferible utilitzar la regressió no lineal en lloc de la regressió de mínims quadrats ordinaris quan no es pugui modelar adequadament la relació amb paràmetres lineals (els paràmetres són lineals quan cada terme del model és additiu i només conté un paràmetre que multiplica el terme).

De fet, convé utilitzar Pearson quan les dades siguin contínues, es distribueixin normalment i s'està interessat a avaluar relacions lineals. Per contra, convé optar per Spearman quan es tracti de dades ordinals, distribucions no normals o bé si se sospita l'existència d'una associació no lineal.

6.3. Continguts en els primers 10000 números naturals

6.3.1. Introducció

Per tal de configurar la corresponent taula de càlcul, tindrem en compte el criteri de Sturges (1926) per als 1229 números primers continguts en la mostra de $M = 10000$ números naturals, amb la qual cosa es tindrà un número aproximat d'interval·ls de classe de:

$$k = 1 + (\log 10000 / \log 2) = 1 + (4 / 0.30103) = 14.29,$$

xifra aquesta que arrodonirem per defecte a 10, a efectes operatius, i l'amplitud de cada interval de classe serà de:

$$c = (L_0 - L_{10}) / k = 10000 / 10 = L_i - L_{i-1} = 1000 \text{ números naturals.}$$

Essent:

- P_i = freqüència acumulada de números primers.
- p_i = freqüència simple de números primers.
- L = interval·ls de classe dels nombres naturals.
- x_i = marca de classe.
- f_i = freqüència relativa simple.
- F_i = freqüència relativa acumulada.

El resultat s'expressa a la següent figura:

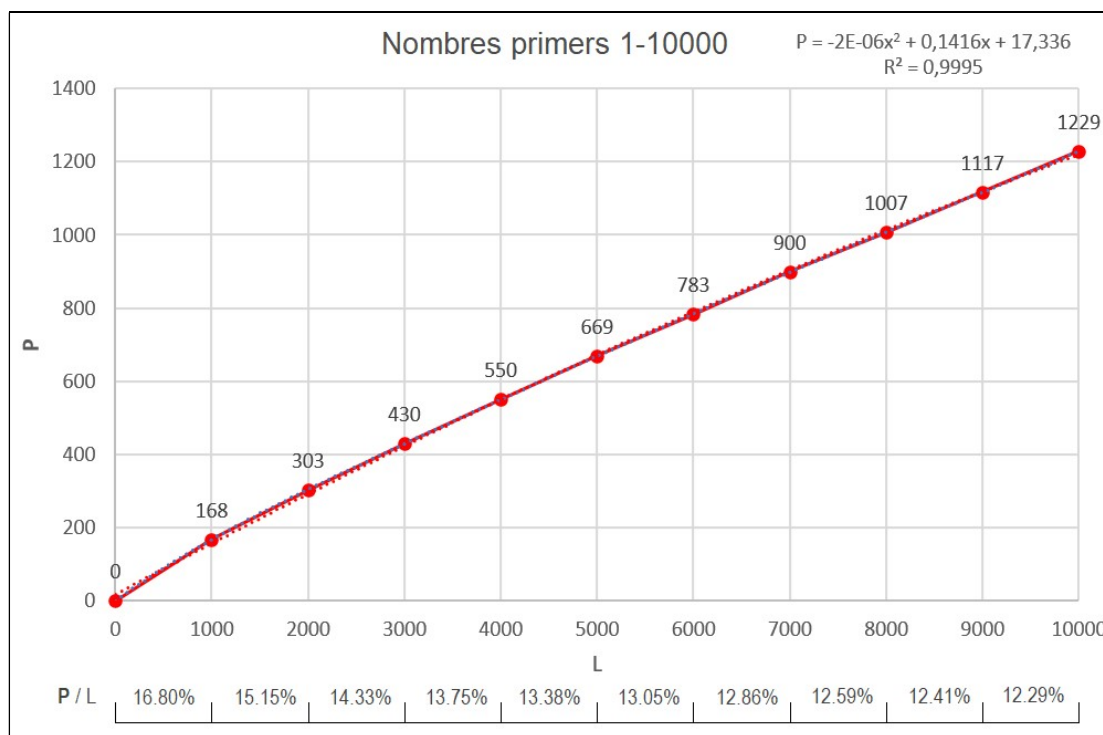


Fig. 4. Diagrama acumulatiu ascendent (1-10000).

L'ajust MC a una paràbola de 2n grau és pràcticament perfecte, ja que el coeficient de correlació no lineal és $r \cong 1$.

De la mateixa manera, s'elabora la taula 5 dels 1229 números primers continguts en los primers 10000 números naturals i podríem seguir elaborant la taula corresponent dels 1754 números primers continguts en els primers 15000 números naturals, així:

Taula 5. Distribució dels nombres primers continguts en els 10000 primers números naturals.

L	p_i	$p_i \uparrow$	$p_i \downarrow$	f_i	$F_i \uparrow$	$F_i \downarrow$	x_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
1-1000	168	168	1061	0.137	0.137	0.863	500	84000	250000	42000000
1001-2000	135	303	926	0.110	0.247	0.753	1500	202500	2250000	303750000
2001-3000	127	430	799	0.103	0.350	0.650	2500	317500	6250000	793750000
3001-4000	120	550	679	0.098	0.448	0.552	3500	420000	12250000	1470000000
4001-5000	119	669	560	0.097	0.544	0.456	4500	535500	20250000	2409750000
5001-6000	114	783	446	0.093	0.637	0.363	5500	627000	30250000	3448500000
6001-7000	117	900	329	0.095	0.732	0.268	6500	760500	42250000	4943250000
7001-8000	107	1007	222	0.087	0.819	0.181	7500	802500	56250000	6018750000
8001-9000	110	1117	112	0.090	0.909	0.091	8500	935000	72250000	7947500000
9001-10000	112	1229	0	0.091	1.000	0.000	9500	1064000	90250000	10108000000
TOTAL Σ	1229	--	--	1.000	--	--	--	5748500	--	37485250000

A continuació, es pot elaborar l'histograma corresponent de rectangles juxtaposats en ordre a la seva magnitud decreixent:

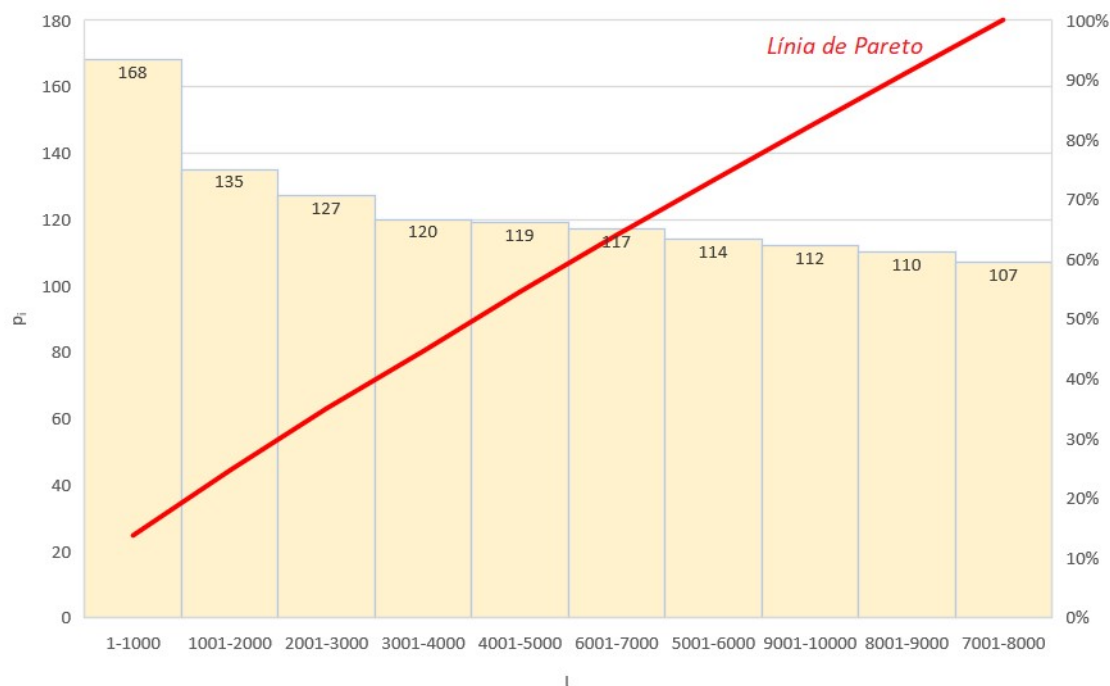


Fig. 5. Histograma de rectangles juxtaposats (1-10000).

Tot just per l'any 1855 es va poder comprovar la conjectura forta o binària de Goldbach analitzant fins el número natural 10000.

6.3.2. Valors centrals de la distribució de freqüències

a) Conceptes previs:

És necessari, sovint, representar un conjunt de dades mitjançant un sol nombre que, de tal manera, esdevé descriptiu del conjunt sencer. El tipus de número escollit dependrà de la característica particular del conjunt que es vol descriure. En aquest apartat del nostre estudi, es tractarà de les anomenades mesures de situació central. Pel que fa a la caracterització del valor central de la distribució dels nombres primers, vegem que G. Udny Yule¹⁶ (Alcaide, 1973), estadístic anglès, al seu manual "Introducció a la Teoria de l'Estadística", ha precisat les condicions que ha de complir també una bona caracterització del valor central d'una sèrie de valors. En resum, són les següents:

a) *La característica del valor central ha de ser definida objectivament a partir de les dades de la sèrie, sense que hi hagi lloc a intervenir cap apreciació subjectiva de l'operador estadístic.*

b) *Ha de dependre de totes les observacions de la sèrie, si és possible.* Assenyalem que, no obstant això, hi ha vegades que es planteja el problema de decidir si cal tenir en compte una observació (*outlier*) que és notablement diferent de totes les altres del seu conjunt o bé si pot ser rebutjada per considerar-se que aquesta observació té caràcter excepcional a causa d'algun factor estrany a la sèrie com, per exemple, un error d'observació o de mesura. En aquest sentit, recomanem l'aplicació dels anomenats "mètodes robusts".

c) *Ha de tenir, en la mesura que sigui possible, una significació concreta, senzilla i fàcil de comprendre.* Si es té en compte que molts dels valors centrals de les sèries han de ser utilitzats per persones poc familiaritzades amb l'Estadística (els "no matemàtics"), es comprèn fàcilment la preferència que a la realitat s'ha donat a la mitjana aritmètica com a característica del valor central de què gaudeix aquesta propietat, d'una interpretació senzilla.

d) *Ha de ser de càlcul fàcil i ràpid,* encara que les modernes eines de càlcul que proporciona la Informàtica, fins i tot amb un nombre molt elevat de dades a processar, fan força més innecessària aquesta condició.

e) *Ha de ser poc sensible a les fluctuacions del mostreig.* Freqüentment les observacions s'efectuen, no sobre el conjunt complet o "univers" d'elements a estudiar, sinó sobre una part d'aquests que rep el nom de "mostra" (en el nostre cas els nombres primers continguts en els primers 10.000 nombres naturals), que ha de ser prou representativa del dit "univers" o "població" i tenir la mida adequada. Aquesta consideració resulta particularment interessant en el cas de

¹⁶ George Udny Yule (1871-1951), estadístic escocès amb estudis d'enginyeria i física, va ser un col·laborador de Pearson, que va fer algunes aportacions a l'obra d'aquest darrer. Va treballar en correlació, i també en corbes asimètriques, com el seu predecessor. Va col·laborar a la publicació de Pearson, proporcionant un exemple de l'aplicació d'ajust d'una corba asimètrica a dades sobre distribució de la pobresa a Anglaterra i Gal·les. Però després es va moure en adreces independents. Va relacionar la regressió amb el mètode dels mínims quadrats, i va proporcionar un gran conjunt d'algorismes que havien desenvolupat els astrònoms, per a la solució de les equacions normals, associades al càlcul de la regressió. Els treballs publicats per Yule cobreixen fins a la primera dècada del segle XX.

l'estudi d'un nombre determinat de valors. Les observacions fetes sobre els elements components de la mostra constitueixen la sèrie estadística de la qual es determina el valor central. És evident que "a priori" no resulta que el valor central corresponent a la mostra adoptada coincideixi amb el valor central que s'obtingria si es fes una sèrie estadística que aplegués un conjunt més ampli o, fins i tot, tot el conjunt complet dels nombres primers a estudiar, ni que coincideixin ni tan sols amb els corresponents a diferents mostres que s'elegissin a l'atzar, ja que conforme augmenti la mida de la mostra en estudi (primers 100000, 1000000, ..., nombres naturals) els resultats de les mitjanes seran creixents i diferents.

Convé fer notar, sobre això, que aquesta elecció del valor central només serà possible quan es conegui la llei de distribució del fenomen en estudi. La variació del valor central i d'altres estadístics en les diferents mostres de nombres primers entra de ple a la part de la Teoria Estadística coneguda per la denominació de "Teoria de les Mostres".

f) *Ha de ser adequada als càlculs algebraics posteriors.* Es comprèn fàcilment la importància de tal condició només pensant en el cas -molt freqüent- de tractar de determinar el valor central que correspon a una sèrie global resultat de reunir diverses sèries estadístiques parcials.

D'entre les cinc mitjanes clàssiques que s'utilitzen (aritmètica, geomètrica, quadràtica, harmònica i cúbica) es veu immediatament que l'aritmètica és la que reuneix millor les anteriors condicions de Yule, si bé ni ella ni les altres quatre proporcionen cap indicació sobre la repartició de les dades de les sèries o de les seves posicions respectives ni sobre les desviacions d'uns respecte d'altres. Es limitaran a condensar totes les dades de la sèrie en un de sol, la mitjana, com a síntesi de tots ells.

En particular, cal tenir en compte que les mitjanes aritmètica ($\bar{X}$), quadràtica (C) i cúbica donen molt de relleu als elements grans de la sèrie i, per descomptat, la segona encara més que la primera. Per contra, les mitjanes geomètrica (G) i harmònica (H) destaquen la influència dels valors petits i redueixen la influència dels valors grans, cosa que cal tenir ben present en els treballs d'aquest tipus. Això es posa de manifest en comparar els valors aconseguits per aquestes.

Alternativament, en comptes d'ometre les dades aïllades a què hem fet referència i calcular una mena de "mitjana modificada" per intentar evitar la dificultat esmentada, es podria dur a terme l'estudi mitjançant una altra mesura robusta de situació (posició) o valor central anomenada "mediana", que no es calcula (l'aplicació de la fórmula corresponent en una distribució de freqüències agrupades per intervals de classe és per tal de cercar-la, no per calcular-la) sinó que es localitza, la qual cosa la distingeix conceptualment d'un paràmetre.

Per definició, en una distribució unitària de freqüències, la mediana d'un conjunt de dades és el valor de l'element central (si el número de nombres primers és imparell com resulta ser en el nostre cas: $P = 1229$) o bé la semisuma dels dos

elements centrals (si aquest nombre és parell) quan aquestes dades estan ordenades, és a dir, disposades en ordre de magnitud creixent o decreixent.

En el cas d'una distribució de freqüències estructurada per intervals de classe, com la que aquí plantejem, el càlcul de la mediana ve donat per la fórmula corresponent l'origen de la qual no cal especificar aquí. A diferència de la mitjana aritmètica i d'altres, doncs, la mediana no s'afecta fàcilment amb els valors extrems (Freund & Williams, 1964-1972), raó per la qual és considerada com un estimador robust de localització.

La mediana, com la mitjana aritmètica, sempre existeix i és única per a cada conjunt de dades. En contra seva posseeix la feixuguesa del que representa ordenar manualment grans conjunts de dades (encara que l'ordinador pot suplir la manca expressada) i, el que és pitjor des del punt de vista de la inferència estadística: una mediana d'una mostra de nombres primers no és, en general, una estimació *tan fiable* d'una mitjana del conjunt com ho és la mitjana aritmètica o l'esperança matemàtica de les mateixes dades. De fet, les medianes de moltes mostres preses de la mateixa població o univers solen variar més àmpliament que les corresponents mitjanes de les mostres.

Recordem, a la fi, que els valors centrals de la distribució de probabilitat han de calcular-se a partir de dades homogènies i nombroses, condicions ambdues inherents a tota bona estadística.

Comencem, como és habitual en aquests casos, pel càlcul dels diferents valors centrals de la distribució de freqüències dels nombres primers continguts en els primers 10000 números naturals. Per això, i a partir de la taula inicial 5, s'obtenen les següents mesures de posició:

b) Mitjana aritmètica i esperança matemàtica:

Hi ha entre totes dues una lleugera diferència de concepte i, de fet, s'apliquen en diferents contextos. L'esperança matemàtica es calcula per endavant (*ex ante*), tot considerant la probabilitat de cada resultat, mentre que la mitjana aritmètica s'obté després d'observar els resultats obtinguts de la realització d'un experiment aleatori (*ex post*). En essència, doncs, l'esperança matemàtica és una mitjana teòrica (*a priori*), mentre que la mitjana aritmètica és una mitjana empírica (*a posteriori*). En el nostre cas, la suma dels 10000 primers números naturals, que conformen una progressió aritmètica de diferència 1, és:

$$S_N = \frac{10000 (1 + 10000)}{2} = 50\,005\,000 ,$$

i la mitjana aritmètica d'aquests números naturals serà, doncs:

$$\bar{X} = S_N / 10000 = 5000.5.$$

Endemés, la mitjana aritmètica dels $P = 1229$ números primers continguts en aquests primers $M = 10000$ números naturals és:

$$\bar{X} = \frac{5736396}{1229} = 4667.5.$$

Tanmateix, el càlcul d'aquesta mitjana aritmètica tot tenint present els intervals de classe definits en la tabla 5 anterior, oferiria alternativament un valor de:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot p_i}{P} = \frac{5748500}{1229} = 4677.4,$$

amb una petita diferència en relació a la determinació anterior que és pròpia del agrupament en classes efectuat.

c) Mitjana quadràtica (RMS):

D'altra banda, la mitjana quadràtica d'aquesta distribució de freqüències ve donada per:

$$C = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \cdot p_i}{P}} = \sqrt{\frac{3748525000}{1229}} = 5522.7.$$

d) Moda:

Pel que es refereix a la "moda" (unimodal), que es trobarà en el interval de classe de major freqüència simple o ordinària, es té:

$$Mo = L_{i-1} + \frac{p_{i+1}}{p_{i-1} + p_{i+1}} \times c_i = 0 + \frac{135}{0 + 135} \times 1000 = 1000.$$

e) Mediana o segon quartil:

Es trobarà en el interval de classe que conté a:

$$p_i^{\uparrow} = \frac{P}{2} = \frac{1229}{2} = 614.5.$$

$$Me = Q_2 = L_{i-1} + \frac{\frac{P}{2} - p_{i-1}^{\uparrow}}{p_i} \times c_i = 4001 + \frac{614.5 - 550}{119} \times 1000 = 4543,$$

que es troba situada en el punt de tall dels diagrames acumulatius ascendent i descendent, per definició. Atenent, no obstant això, a la distribució unitària dels nombres primers que incloem a l'Annex del present treball, li correspon un valor primer $Me = 4523$, justificant-se la petita diferència observada pel fet d'haver-se efectuat el càlcul a partir d'una distribució conjunta de freqüències (particionada per intervals de classe).

S'acompleix:

$$C = 5522.7 > \bar{X} = 4677.4 > Me = 4543 > Mo = 1000$$

f) Mitjana geomètrica:

$$G = \text{anti log} \left(\sum_{i=1}^{10} p_i \cdot \log x_i / P \right) = \text{anti log} \frac{4338.557}{1229} = 3389.6$$

g) Mitjana harmònica:

$$H = \frac{P}{\sum_{i=1}^{10} \frac{p_i}{x_i}} = \frac{1229}{0.615} = 1998.4$$

Lògicament, les quatre mitjanes clàssiques aquí estudiades a més de la mitjana cúbica calculada posteriorment, que constitueixen estimadors de posició o valors centrals de la distribució de freqüències, com no podria ser d'una altra manera des del punt de vista teòric, resten ordenades monotònicament, en base a la seva magnitud, d'aquesta manera:

$$\text{harmònica} < \text{geomètrica} < \text{aritmètica} < \text{quadràtica} < \text{cúbica}$$

$(H = 1998.4) < (G = 3389.6) < (\bar{X} = 4677.4) < (C = 5522.7) < (M_3 = 6094.9)$
i pot observar-se que aquests valors coincideixen, per la seva magnitud, amb la construcció geomètrica de la Fig. 11.

h) Primer quartil:

Es trobarà en el interval de classe que conté a:

$$p_i^{\uparrow} = \frac{P}{4} = \frac{1229}{4} = 307.25$$

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{P}{4} - p_{i-1}^{\uparrow}}{p_i} \times c_i = 2001 + \frac{307.25 - 303}{127} \times 1000 = 2035,$$

malgrat que la distribució unitària ofereix el valor del nombre primer 2029.

i) Tercer quartil:

Es trobarà en el interval de classe que conté a:

$$p_i^{\uparrow} = \frac{3P}{4} = \frac{3687}{4} = 921.75$$

$$Q_3 = L_{i-1} + \frac{\frac{3P}{4} - p_{i-1}^{\uparrow}}{p_i} \times c_i = 7001 + \frac{921.75 - 900}{107} \times 1000 = 7204,$$

malgrat que la distribució unitària ofereix el valor del nombre primer 7219.

j) Trimèdia (Tukey):

Les mesures robustes de tendència central són estadístics que tracten de pal·liar els problemes d'estimació associats a distribucions anòmales. Cal

assenyalar, entre elles, les anomenades mitjanes “k-retallades” o “k-winsoritzades” així como la “trimèdia” que, en el nostre cas, vindrà donada per l'expressió:

$$T = \frac{Q_1 + 2Q_2 + Q_3}{4} = \frac{2035 + 2 \times 4543 + 7204}{4} = 4581,$$

que, en el cas de la distribució unitària dels nombres primers, ofereix un valor:

$$T = \frac{Q_1 + 2Q_2 + Q_3}{4} = \frac{2029 + 2 \times 4523 + 7219}{4} = 4573.5,$$

que varia lleugerament en relació al resultat anteriorment obtingut mitjançant l'agrupament efectuat de les freqüències en intervals de classe.

La trimèdia, en definitiva, és una aproximació a la mitjana que s'empra molt en meta anàlisi, suposant que la població és finita.

k) 1er tercil:

Es trobarà en el interval de classe que conté a:

$$p_i^\uparrow = P / 3 = 1229 / 3 = 409.67$$

$$T_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{P}{3} - p_{i-1}^\uparrow}{p_i} \times c_i = 2001 + \frac{409.67 - 303}{127} \times 1000 = 2841$$

l) 2n tercil:

Es trobarà en el interval de classe que conté a:

$$p_i^\uparrow = 2P / 3 = 819.33$$

$$T_2 = L_{i-1} + \frac{\frac{2P}{3} - p_{i-1}^\uparrow}{p_i} \times c_i = 6001 + \frac{819.33 - 783}{117} \times 1000 = 6311.5$$

D'aquesta manera, la distribució dels primers 10000 números naturals i primers corresponents pels seus quantils (quartils i terci's) és la següent:

$Q_0 = T_0$	Q_1	T_1	$Q_2 = Me$	T_2	Q_3	$Q_4 = T_3$	
1	2035	2841	4543	6311	7204	10000	⇒ Núm. natural
(2)	(2029)	(2819)	(4523)	(6301)	(7219)	(9973)	⇒ Núm. primer corresp.

Fig. 6. Distribució i valor dels quantils (1-10000).

m) Mediana de Gastwirth (1966):

Dins l'Estadística robusta, cal considerar aquí també aquest valor central (Franquet, 2019) que ofereix més informació mostral que la mediana i és més

resistent que la trimèdia a la influència dels *outliers*, per la qual cosa constitueix una alternativa prou vàlida a elles com a paràmetre de posició. Ve donada per l'expressió:

$$M_{eg} = \frac{4M_e + 3T_1 + 3T_2}{10} = \frac{4 \times 4543 + 3 \times 2841 + 3 \times 6311.5}{10} = 4563,$$

valor que canvia poc tot prenent en consideració els valors dels paràmetres dimanants de la distribució unitària de freqüències, com es pot comprovar a la taula 1 de l'Annex d'informació complementària, o sigui:

$$M_{eg} = \frac{4M_e + 3T_1 + 3T_2}{10} = \frac{4 \times 4523 + 3 \times 2819 + 3 \times 6301}{10} = 4545.2.$$

n) Mitjana cúbica:

Vindrà donada per:

$$M_3 = \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^3 \times p_i}{P}} = \sqrt[3]{\frac{2.78268 \times 10^{14}}{1229}} = 6094.9$$

6.3.3. Mesures de dispersió

Les mesures de dispersió són números que indiquen si una variable es mou molt, poc, més o menys que una altra. La raó d'aquest tipus de mesures és conèixer, de manera resumida, una característica de la variable estadística estudiada. En aquest sentit, han d'acompanyar les mesures de tendència central que hem vist abans. Totes juntes, ofereixen una informació que després podrem utilitzar per comparar i, si cal, per prendre decisions.

Les mesures de dispersió, també anomenades “mesures de variabilitat”, mostren precisament la variabilitat d'una distribució indicant, mitjançant un nombre, si les diferents puntuacions d'una variable estan molt allunyades d'una mitjana o no. Com més gran sigui aquest valor, més gran serà també la variabilitat; per contra, com més petit sigui, més homogenia serà a la mitjana. Així, se sap si tots els casos són semblants o bé varien molt entre ells. Per tal de calcular la variabilitat que la distribució dels nombres primers té respecte de la mitjana, es calcula la mitjana de les desviacions de les puntuacions respecte a la mitjana aritmètica. Però la suma d'aquestes desviacions sempre és zero (per una coneguda propietat de la mitjana aritmètica), així que s'adopten dues classes d'estratègies per salvar aquest problema. Una és prenent les desviacions en valor absolut (obtenint-se l'anomenada “desviació mitjana”) i una altra és prenent les desviacions al quadrat (obtenint-se la “variança” i la seva arrel quadrada, la “desviació típica”, “desviació estàndard” o “desviació quadràtica mitjana”).

Pel que es refereix a la desviació típica o “standard” σ com a mesura de dispersió absoluta de la distribució dels nombres primers continguts en els 10000 primers números naturals, vegem que el seu valor ve donat per l'expressió:

$$\sigma = \sqrt{C^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{5522.7^2 - 4677.4^2} = 2936.3$$

i procedeix realitzar la correcció per agrupaments en classes o intervals d'amplitud $c = 1000$. La correcció Sheppard per a la determinació de la σ_c més ajustada de les dades del problema dona un valor de la variància corregida de:

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 - \frac{c^2}{12} = 5522.7^2 - 4677.4^2 - \frac{1000^2}{12} =$$

$$= 8\,622\,144.5 - 83\,333.3 = 8\,538\,811.2 ; \text{ d'on: } \sigma_c = 2922.1,$$

que lògicament resulta ser d'alguna menor quantia que en la primera determinació efectuada. Això podria obligar a efectuar una lleugera revisió dels càlculs anteriors en els quals s'hagi fet intervenir l'expressada mesura de dispersió dels valors de la variable aleatòria estadística emprada.

En el seu cas, podria també portar-se a terme la comprovació de Charlier anomenada així en homenatge al seu inventor, l'astrònom suec Carl Charlier (1862-1934), que és una comprovació de la realització correcta dels càlculs efectuats de la variància mostral quan aquesta s'ha calculat per a un conjunt de dades agrupades en una distribució de freqüències a través de la computació d'una nova columna de valors a partir de la corresponent taula de freqüències.

- Les mesures de dispersió ofereixen un valor numèric que indica el grau de variabilitat d'una variable.
- El rang, la variància, la desviació típica i el coeficient de variació de Pearson són les mesures de dispersió més conegudes.
- El rang mostra la diferència existent entre el valor màxim i el mínim d'una mostra o població de dades.

Per això, establim la següent taula auxiliar de càlcul:

Taula 6. Comprovació de Charlier.

L	x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$p_i \cdot x_i^2$	$(x_i + 1)^2$	$p_i \cdot (x_i + 1)^2$
1-1000	500	168	84000	250000	42000000	251001	42168168
1001-2000	1500	135	202500	2250000	303750000	2253001	304155135
2001-3000	2500	127	317500	6250000	793750000	6255001	794385127
3001-4000	3500	120	420000	12250000	1470000000	12257001	1470840120
4001-5000	4500	119	535500	20250000	2409750000	20259001	2410821119
5001-6000	5500	114	627000	30250000	3448500000	30261001	3449754114
6001-7000	6500	117	760500	42250000	4943250000	42263001	4944771117
7001-8000	7500	107	802500	56250000	6018750000	56265001	6020355107
8001-9000	8500	110	935000	72250000	7947500000	72267001	7949370110
9001-10000	9500	112	1064000	90250000	10108000000	90269001	10110128112
TOTAL Σ	50000	1229	5748500	--	37485250000	--	37496748229

Apliquem, a continuació, la comprovació de Charlier (1931) per donar com a bones les sumes calculades en les taules precedents:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} p(x_i + 1)^2 &= \sum_{i=1}^{10} p_i \cdot x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{10} p_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{10} p_i = \\ &= 37485250000 + 2 \times 5748500 + 1229 = 37496748229.\end{aligned}$$

La igualtat esdevé correcta, per la qual cosa les sumes efectuades per al càlcul de la variància també ho són.

Ara es dedueix, com a mesura de dispersió relativa, un coeficient de variació de Pearson de:

$$CV = \frac{\sigma_c}{\bar{X}} \times 100 = \frac{2922.1}{4677.4} \times 100 = 62.47\%$$

i un coeficient d'uniformitat de: $100 (1 - CV) = 100 (1 - 0.6247) = 37.53 \%$.

Altres mesures d'interès són les següents:

- Coeficient d'apertura: $C_{ap} = \frac{9973}{2} = 4986.5$.
- Recorregut o rang: entre los valores extremos dels nombres primers continguts en el subconjunt dels números naturals de l'1 al 10000, o sigui:

$$R = 9973 - 2 = 9971.$$

- Recorregut relatiu: $R' = \frac{R}{\bar{X}} = \frac{9971}{4677.4} = 2.13$.
- Recorregut interquartílic: $R'' = Q_3 - Q_1 = 7204 - 2035 = 5169$.
- Recorregut semi-interquartílic:

$$R''' = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{5169}{7204 + 2035} = 0.60.$$

Vegem, també, que la taula 7 auxiliar de càlcul, en la seva darrera columna, permet la determinació d'altra mesura de dispersió absoluta a la qual ja ens hem referit anteriorment: la desviació mitjana absoluta¹⁷ (DM) respecte a la

¹⁷ Per cert, que la DM es pot fer servir també per estimar la desviació típica σ , i és fàcil de calcular en petites mostres si les desviacions es calculen respecte a la mitjana Me. Les eficiències del recorregut R i de la DM són menors que en estimacions més senzilles de calcular que la DM. Per a mostres de les mides compreses entre 5 i 10, aquestes estimacions utilitzen la diferència existent entre la suma dels dos valors més grans i la suma dels dos valors més petits (Dixon i Massey, 1969). Per a mostres de mides més grans, com és el cas de l'empleada en aquest treball sobre els nombres primers, es podrien fer servir tres o quatre dels valors més grans i dels més petits.

mitjana aritmètica (que seria mínima en relació a la mediana, sense tenir en compte la moda), que resulta ser la mitjana de les desviacions de les observacions en relació a la mitjana aritmètica, on la desviació cal agafar-la en valor absolut o mòdul, a saber:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{10} |x_i - \bar{X}| \cdot p_i}{p} = \frac{3139334}{1229} = 2.554.4 \approx 65\sigma/7 = 6 \times 2922.1/7 = 2504.7$$

6.3.4. Asimetria o biaix

Les mesures d'*asimetria* o *biaix* són indicadors que permeten d'establir el *grau de simetria* (o asimetria) que presenta la distribució de probabilitat d'una variable aleatòria sense haver de fer-ne la corresponent representació gràfica. Com a eix de simetria considerem una recta paral·lela a l'eix d'ordenades que passa per la mitjana aritmètica de la distribució. Si una distribució és perfectament simètrica, hi ha el mateix nombre de valors a la dreta que a l'esquerra de la mitjana o esperança matemàtica, i per tant, el mateix nombre de desviacions amb signe positiu que amb signe negatiu.

Diem que hi ha asimetria positiva (o a la dreta) si la “cua” a la dreta de la mitjana és més llarga que la de l'esquerra, és a dir, si hi ha valors més separats de la mitjana a la dreta. Per contra, direm que hi ha asimetria negativa (o a l'esquerra) si la cua a l'esquerra de la mitjana és més llarga que la de la dreta, és a dir, si hi ha valors més separats de la mitjana a l'esquerra.

Es podria pensar que definir la simetria emprant la mediana per a variables contínues i usant la mitjana aritmètica per a variables discretes esdevé una elecció arbitrària. En realitat, això no és així, ja que si una variable és contínua, coincideixen ambdós criteris de simetria (pel que fa a la mitjana aritmètica i a la mediana). És més, la mitjana aritmètica i la mediana coincideixen per a les distribucions contínues perfectament simètriques. D'altra banda, en el cas de variables discretes, la distribució és simètrica si el costat dret del diagrama s'obté per una imatge especular des de la mitjana. En aquest cas coincideix la mitjana amb la mediana si el nombre d'observacions és imparell o senar. Si la variable és contínua simètrica i unimodal, també coincideixen la mitjana aritmètica, la mediana i la moda.

Dintre dels diversos tipus d'asimetria possible, anem a destacar els dos fonamentals:

-Asimetria positiva:

Si les freqüències més altes es troben situades al costat esquerre de la mitjana aritmètica, mentre que en el costat dret hi ha freqüències més petites (*cua*).

-Asimetria negativa:

Quan la cua es troba situada al costat esquerre, tot al contrari d'allò que succeeix en el cas anterior.

Quan realitzem un estudi descriptiu com el que aquí es desenvolupa en relació amb la distribució dels nombres primers, resulta altament improbable que la distribució de freqüències sigui totalment simètrica. A la pràctica direm que la distribució de freqüències és simètrica si ho és només d'una manera aproximada. D'altra banda, observant amb cura la gràfica de la distribució (Fig. 5), podem veure clar de quin costat (esquerra) hi ha les freqüències més altes. Convé definir, doncs, uns estadístics que ajudin a interpretar l'asimetria, que anomenarem *índexs d'asimetria*.

A continuació, emprarem, en el cas que estem desenvolupant en aquest treball, alguns dels índexs d'asimetria o biaix més usuals, com són l'índex basat en els tres quartils, el moment de tercer ordre¹⁸ i la distància existent entre la moda i la mitjana o la mitjana i la mediana.

Pel que fa a les restants característiques de la distribució dels nombres primers, vegem que una de l'asimetria o biaix la constitueix l'anomenat "1r coeficient d'asimetria de Pearson", donat per:

$$P_1 = \frac{\bar{X} - M_0}{\sigma_c} = \frac{4677.4 - 1000}{2922.1} = 1.26 > 0,$$

així doncs es tracta d'una asimetria a la dreta (positiva).

Així mateix, el 2n coeficient d'asimetria de Pearson ofereix:

$$P_2 = \frac{3(\bar{X} - M_e)}{\sigma_c} = \frac{3(4677.4 - 4543)}{2922.1} = 0.14 > 0,$$

que confirma el resultat anteriorment obtingut, o bé el "coeficient de biaix quartílic", també conegut com a "coeficient d'asimetria de Yule-Bowley", de valor:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \\ &= \frac{7204 - 2 \times 4543 + 2035}{5169} = 0.30 > 0, \end{aligned}$$

que condueix, en tots els casos, a conclusions similars.

Tot seguit, a partir dels resultats obtinguts de la mostra, s'elaborarà la següent taula:

¹⁸ El coneixement de la simetria permet precisar, d'alguna manera, la forma d'una distribució de freqüències, però aquest coneixement es pot millorar notòriament en disposar d'altres característiques d'aquesta distribució i, de manera general, mitjançant els anomenats "moments de la distribució", que poden ser respecte a l'origen (dels quals són coneguts la mitjana aritmètica i el quadrat de la mitjana quadràtica C^2) o bé respecte a la mitjana (com la variància σ^2).

Taula 7. Taula de càlculs auxiliars (1-10000).

L	p _i	x _i	p _i /x _i	log x _i	p _i · log x _i	x _i -X	(x _i -X) ³ ·p _i	(x _i -X) ⁴ ·p _i	x _i -X · p _i
1-1000	168	500	0.336	2.699	453.427	-4177.4	-1.22468E+13	5.11594E+16	701799.8
1001-2000	135	1500	0.090	3.176	428.772	-3177.4	-4.33053E+12	1.37597E+16	428946.3
2001-3000	127	2500	0.051	3.398	431.538	-2177.4	-1.31101E+12	2.85457E+15	276527.3
3001-4000	120	3500	0.034	3.544	425.288	-1177.4	-1.95853E+11	2.30594E+14	141285.6
4001-5000	119	4500	0.026	3.653	434.732	-177.38	-664141950.2	1.17805E+11	21108.22
5001-6000	114	5500	0.021	3.740	426.401	822.62	63460376399	5.22038E+13	93778.68
6001-7000	117	6500	0.018	3.813	446.111	1822.6	7.08393E+11	1.29113E+15	213246.5
7001-8000	107	7500	0.014	3.875	414.632	2822.6	2.40625E+12	6.79193E+15	302020.3
8001-9000	110	8500	0.013	3.929	432.236	3822.6	6.14435E+12	2.34875E+16	420488.2
9001-10000	112	9500	0.012	3.978	445.505	4822.6	1.25622E+13	6.05829E+16	540133.4
TOTAL Σ	1229	50000	0.615	--	4338.643	3226.2(*)	3.79988E+12	1.6021E+17	3139334

(*) Aquest valor seria 0 d'haver-se considerat una $\bar{X} = 50000/10 = 5000$ per la primera propietat de la mitjana aritmètica.

Dels resultats que es dedueixen de la taula anterior, s'infereix immediatament que el moment central (respecte a la mitjana aritmètica) de tercer ordre és:

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{X})^3 \cdot p_i}{P} = \frac{3.79988 \times 10^{12}}{1229} = 3\,091\,847\,030 ,$$

raó per la qual es tindrà un "coeficient directe d'asimetria" o "coeficient de biaix" de Fisher (Alcaide, 1973) de:

$$g_1 = \frac{m_3}{\sigma_c^3} = \frac{3091847030}{2922 \cdot 1^3} = 0.12 > 0 ,$$

que resulta moderadament asimètrica, el que confirma els resultats anteriors.

6.3.5. Apuntament o curtosi

Pel que es refereix a l'apuntament o "curtosi", vegem que en la teoria de la probabilitat i estadística, la *curtosi* (o "kurtosi") és una mesura de la forma o apuntament de les distribucions. Així, les mesures de curtosi (també anomenades d'apuntament o de concentració central) intenten estudiar la major o menor concentració de freqüències existents al voltant de la mitjana aritmètica i a la zona central de la distribució. D'aquesta manera, els índexs de curtosi mesuren la major o menor concentració de les dades justament al voltant de la mitjana aritmètica, partint com a referència de la distribució normal o corba campaniforme de Gauss. Aquí, emprant el moment central o respecte a l'origen de 4t ordre, i a partir dels resultats obtinguts a la taula 7 anterior, es té:

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{X})^4 \cdot p_i}{P} = \frac{1.6021 \times 10^{17}}{1229} = 130\,358\,014\,646\,054$$

encara que, aplicant la corresponent correcció de Sheppard per a la curtosi, aquest valor quedaria escassament reduït a:

$$m_{4c} = m_4 - (c^2/2) \times m_2 + (7/240) \times c^4 = 126\,076\,252\,312\,721,$$

i es tindrà un coeficient de curtosi de Fisher de:

$$g_2 = \frac{m_4}{\sigma_c^4} - 3 = \frac{130358014646054}{2922.1^4} - 3 = -1.21 < 0,$$

i el mateix succeeix tot considerant els nous valors de m_{4c} i m_{2c} un cop efectuada la correcció propugnada, per la qual cosa es tracta d'una distribució quelcom platicúrtica o aplatada.

Aquest coeficient s'aplica a distribucions unimodals simètriques o moderadament asimètriques, per tal d'avaluar la curtosi o apuntament de la distribució de freqüències; més específicament, de la funció massa de probabilitat o la funció de densitat. Mesura l'apuntament de la distribució de la variable aleatòria estadística en relació a una distribució patró, anomenada "normal estàndard", per a la qual el coeficient és nul. En el cas concret que ens ocupa, doncs, té lloc un menor apuntament que el propi de la campana de Gauss.

6.3.6. Mesures de concentració

Per últim, la corba de Lorenz és la línia poligonal trencada que uneix els punts $(0, 0)$, (q_1, p_1) , (q_2, p_2) , (q_3, p_3) , ..., (q_k, p_k) . En el cas plantejat, tenim que $k = 10$ (número de classes).

Altra forma d'observar la corba de Lorenz és estimant l'àrea de la superfície que es troba compresa entre la corba i la diagonal del primer quadrant del cercle (la recta $P_i = Q_i$). Aquesta superfície s'anomena **àrea de concentració**. L'**Índex de Gini** constitueix un índex de concentració dels valors de la variable aleatòria estadística i equival tot just al doble de l'àrea de concentració. El seu valor estarà sempre comprès entre els valors zero i un ($0 \leq I_G \leq 1$).

Es considera, en definitiva, que existeix equidistribució dels nombres primers quan $P_i = Q_i$, i en aquest cas, l'expressada corba de Lorenz adoptaria la configuració gràfica següent:

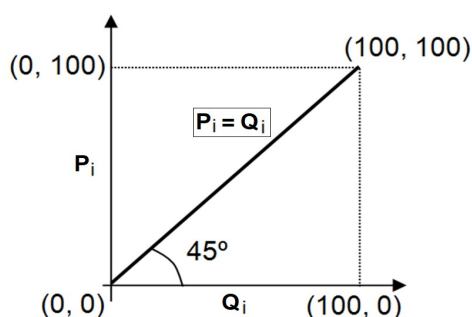


Fig. 7. Coordenades cartesianes rectangulars de les variables p i q .

o sigui, es tracta d'una recta que descansa teòricament sobre la bisectriu del primer quadrant ($P_i = Q_i$). En el nostre cas, la taula 8 de càlculs auxiliars per a la determinació de l'índex de Gini I_G serà la següent:

Taula 8. Auxiliar de càlcul de l'índex de Gini.

L_i	p_i	$f_i = p_i / \sum p_i$	$f_i \cdot 100$	q_i	$(q_i / \sum q_i) \cdot 100$	P_i	Q_i	$P_i - Q_i$
1-1000	168	0.137	13.67	1000	10.00	13.67	10.00	3.67
1001-2000	135	0.110	10.98	1000	10.00	24.65	20.00	4.65
2001-3000	127	0.103	10.33	1000	10.00	34.99	30.00	4.99
3001-4000	120	0.098	9.76	1000	10.00	44.75	40.00	4.75
4001-5000	119	0.097	9.68	1000	10.00	54.43	50.00	4.43
5001-6000	114	0.093	9.28	1000	10.00	63.71	60.00	3.71
6001-7000	117	0.095	9.52	1000	10.00	73.23	70.00	3.23
7001-8000	107	0.087	8.71	1000	10.00	81.94	80.00	1.94
8001-9000	110	0.090	8.95	1000	10.00	90.89	90.00	0.89
9001-10000	112	0.091	9.11	1000	10.00	100.00	100.00	0.00
TOTAL Σ	1229	1	100.00	10000	100.00	582.26	550.00	32.26

I s'obté un índex de Gini, segons la fórmula donada per Pulido (1971), de:

$$I_G = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (P_i - Q_i)}{P_i} = \frac{32.26}{482.26} = 0.06689 = 6.69\%$$

Amb això ja és possible efectuar el traçat de la corba poligonal de Lorenz, així:

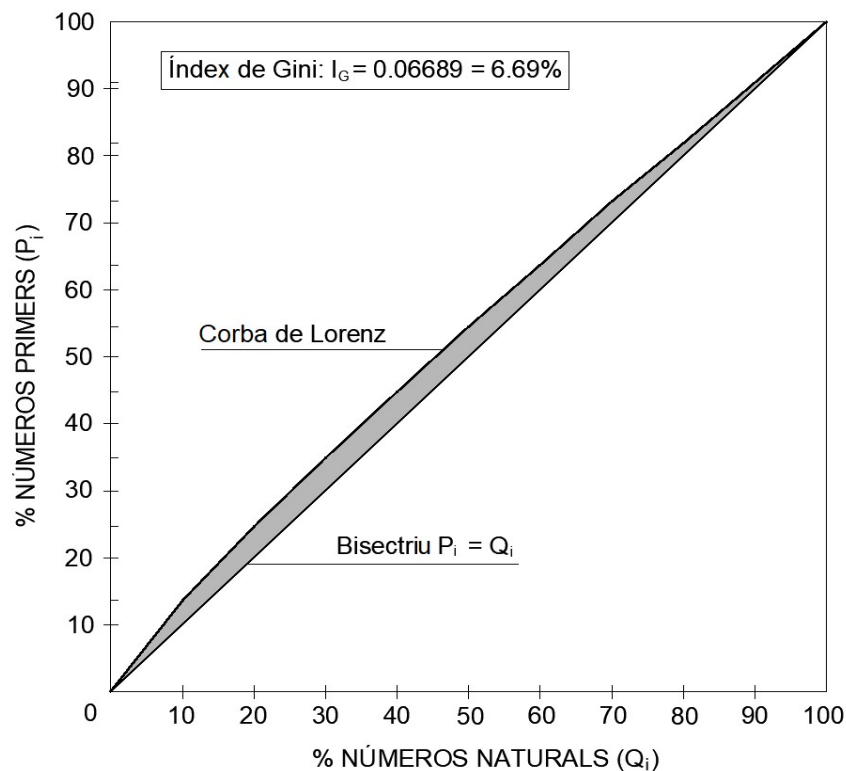


Fig. 8. Índex de Gini i corba de Lorenz.

Així doncs, a mesura que augmenta el percentatge de números naturals investigats, el percentatge dels números primers disminueix, tal com es pot apreciar a la Fig. 9 mitjançant un simple ajust polinòmic de 6è grau. Front al 12.29% que hem vist fins ara, en els primers 100000 nombres naturals només hi ha 9592 nombres primers, és a dir, el 9.59%. Si continuem el procés, trobarem que de 1 000 000 de nombres naturals, només el 7.845% són primers. En 10 000 000 hi ha 664579, la qual cosa disminueix el percentatge al 6.65%. En els primers 100 000 000 nombres naturals hi ha 5 761 455 primers (5.76%), en els primers 10^9 naturals hi ha 50 847 534 primers (5.08%), en els primers 10^{10} naturals hi ha 455 052 501 primers (4.55%) i en els primers 10^{11} naturals només hi ha 4 118 054 813 primers (4.12%), o sigui, amb el percentatge *in decrescendo*.

Si continuéssim cercant així indefinidament el percentatge de nombres primers s'aproparia al 0% encara que mai no aconseguiria aquesta xifra, ja que, com hem vist a l'apartat 4 anterior, els nombres primers són infinits.

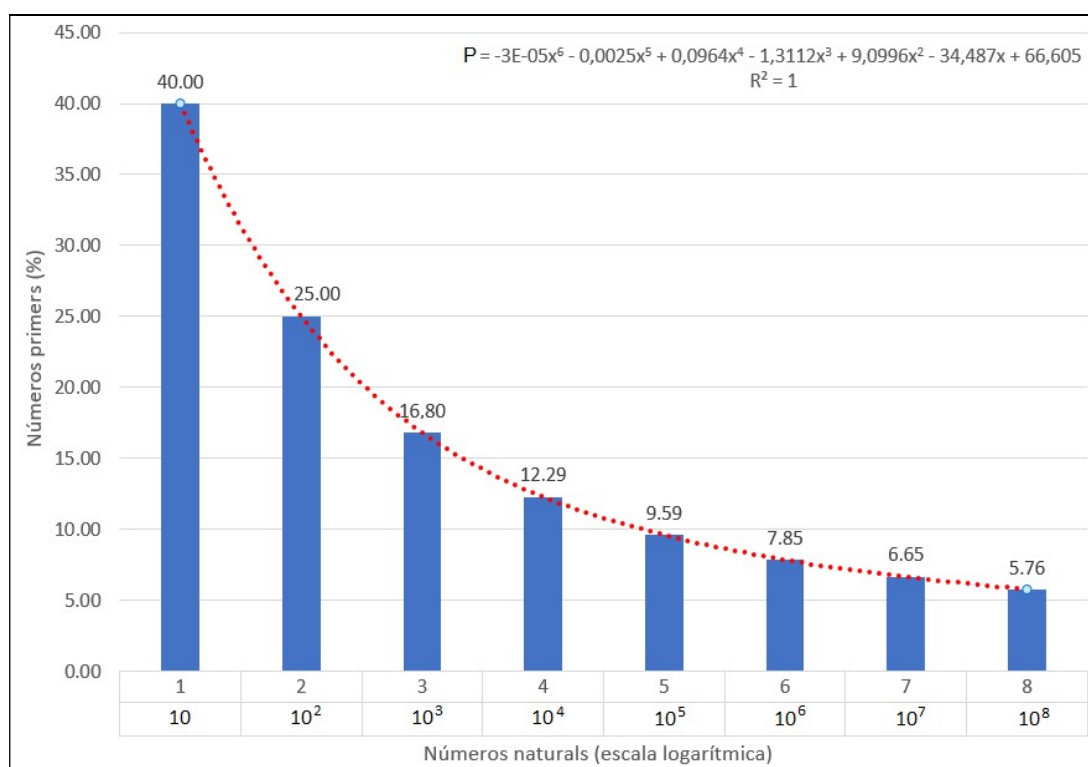


Fig. 9. Nombres primers continguts en els primers 10^8 números naturals.

S'observa, en definitiva, que el percentatge acumulat de nombres primers, a la corba poligonal de Lorenz, sempre es troba per sobre del percentatge acumulat dels nombres naturals, cosa que succeirà en totes les mostres que es vulguin estudiar a partir de l'origen, qüestió aquesta que confirma la lleugera asimetria a la dreta (positiva) de la corresponent distribució de freqüències que ja s'ha fet a l'epígraf anterior.

La distribució dels nombres primers és un assumpte reiteratiu de recerca en la teoria de números: si es consideren números aïlladament, els primers

semblarien estar distribuïts de manera probabilística, però la distribució «global» dels nombres primers s'ajusta a lleis ben definides¹⁹.

Altres índexs que es poden considerar aplicables al cas que ens ocupa són el de Williamson i el de concentració de Lorenz, que s'obté (aquest darrer) mitjançant l'aplicació de la fórmula basada en els percentatges acumulats, tots dos emprats comunament en els treballs pràctics.

La verificació de tots aquests resultats, que ha resultat plenament satisfactòria, s'ha realitzat amb l'antiga aplicació estadística “R commander” i actual “r Studio”²⁰. Endemés, quan s'utilitza aquesta darrera cal assenyalar quins paquets de la mateixa s'han emprat.

6.3.7. Mesura d'independència

La prova que es desenvolupa a continuació s'empra per determinar si hi ha una diferència estadísticament significativa entre la freqüència esperada (q_i) i les freqüències observades (p_i) en una o més categories d'una taula de contingència. Per a taules de contingència amb mides de mostra més petites, s'utilitza, al seu lloc, una prova exacta de Fisher.

D'altra banda, utilitzant la prova de Pearson χ^2 (o txi-quadrat) amb $k = 10$ categories o intervals de classe, cal preguntar-se si les observacions de la proporció de nombres primers existents per a cada categoria (p_i) estan o no d'acord amb els valors teòrics corresponents per a cadascuna, és a dir, la proporció de nombres naturals (q_i) de cada classe. És a dir, cal contrastar la hipòtesi d'independència que estableix els valors de les freqüències teòriques (q_i). Amb això, l'estadístic emprat és el següent:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i} = 1.902 ,$$

que és el valor resultant de la taula següent:

¹⁹ Els nombres primers estan ben distribuïts, en el sentit que, per a $n \geq 2$, existeix almenys un nombre primer comprès entre n i $2n$. S'ha demostrat que, en general, els nombres primers estan més dispersos a mesura que es tendeix a l'infinit. Els nombres primers propers entre si tendeixen a evitar la repetició dels seus últims dígitos, és a dir, un nombre primer que acaba en 1 és menys probable que sigui seguit per un altre que acaba en 1 del que es podria esperar d'una seqüència aleatòria. Així ho explica Kannan Soundararajan, de la Universitat de Stanford (Califòrnia), que va informar del descobriment amb el col·lega Robert Lemke Olivier. Tot i que els nombres primers s'utilitzen en una sèrie d'aplicacions, com ara la criptografia, aquest biaix “anti-igualtat” no té cap ús pràctic o fins i tot cap implicació més àmplia de la teoria de nombres.

²⁰ És una interfície gràfica d'usuari per al llenguatge de programació R, alliberada sota llicència GNU GPL i desenvolupada i mantinguda pel Departament de Sociologia de la Universitat McMaster. És potser l'alternativa més viable basada en R als paquets estadístics usuals com a SPSS. Amb cada opció de menú utilitzada, presenta el codi R que s'ha executat. També coneguda com a **Rcmdr**, aquesta aplicació pot ser instal·lada des de R com un paquet més d'aquest llenguatge. Ha estat utilitzada com a entorn d'aprenentatge en nombrosos cursos i llibres d'estadística per a estudiants, tecnòlegs i científics.

Taula 9. Auxiliar de càlcul de l'estadígraf χ^2 (1-10000).

L_i	Freqüència relativa (%)		$d_i = p_i - q_i $	$(p_i - q_i)^2$	$(p_i - q_i)^2/q_i$	$(p_i - q_i - 0.5)^2$	$(p_i - q_i - 0.5)^2/q_i$
	p_i	q_i					
1-1000	13.670	10.00	3.670	13.466	1.347	10.047	1.005
1001-2000	10.985	10.00	0.985	0.969	0.097	0.235	0.023
2001-3000	10.334	10.00	0.334	0.111	0.011	0.028	0.003
3001-4000	9.764	10.00	0.236	0.056	0.006	0.070	0.007
4001-5000	9.683	10.00	0.317	0.101	0.010	0.033	0.003
5001-6000	9.276	10.00	0.724	0.524	0.052	0.050	0.005
6001-7000	9.520	10.00	0.480	0.230	0.023	0.000	0.000
7001-8000	8.706	10.00	1.294	1.674	0.167	0.630	0.063
8001-9000	8.950	10.00	1.050	1.102	0.110	0.302	0.030
9001-10000	9.113	10.00	0.887	0.787	0.079	0.150	0.015
TOTAL Σ	100.000	100	0.000	19.020	$\chi^2 = 1.902$	11.545	$\chi_c^2 = 1.154$

Alternativament, també la χ^2 pot calcular-se així:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{p_i^2}{q_i} - N, \text{ essent:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} \frac{p_i^2}{q_i} &= 18.69 + 12.07 + 10.68 + 9.53 + 9.38 + \\ &+ 8.60 + 9.06 + 7.58 + 8.01 + 8.30 = 101.902, \end{aligned}$$

amb la qual cosa: $\chi^2 = 101.902 - 100 = 1.902$, que confirma plenament el resultat obtingut a la taula 9.

Com es pot veure, l'estadístic χ^2 , en aquest cas, té: $n = k - 1 = 10 - 1 = 9$ graus de llibertat (g.ll.)²¹. El valor crític corresponent, amb el nivell de significació²² del 5% (o sigui: $P = 0.950$), és de $\chi_{9,0.95}^2 = 16.92 > 1.902$, segons es pot comprovar a la taula 2 de l'Annex d'Informació Complementària i, per tant, no hi ha raó suficient (en no ésser el valor observat suficientment gran quant les seves diferències o discrepàncies amb el valor teòric) com per tal de rebutjar la hipòtesi teòrica o alternativa (q_i), acceptant-se la hipòtesi nul·la, almenys a la mostra estudiada dels nombres primers continguts en els primers 10000 nombres naturals (taula 1 de l'esmentat Annex).

D'altra banda, quan s'apliquen a dades discretes els resultats per a distribucions contínues s'ha de practicar la correcció de Yates i comparar els resultats obtinguts. Si tots dos valors condueixen a la mateixa conclusió per a

²¹ El nombre de graus de llibertat d'un estadístic es defineix com el nombre d'observacions independents de la mostra (mida mostral) menys el nombre de paràmetres de la població o univers que cal estimar. A major complexitat o amplitud del problema més gran serà també el núm. de g.ll.

²² El nivell de significació és el límit per tal de jutjar un resultat como estadísticament significatiu. Si el valor obtingut és menor que el nivell de significació, es considera que el resultat és estadísticament significatiu. El nivell de significació també es coneix como el nivell α .

un cert nivell de significació, rarament es presenten dificultats. Si condueixen a conclusions diferents es pot, o bé incrementar les mides mostrals o, si això no és possible, es poden fer servir mètodes de probabilitat exactes d'acord amb la distribució multinomial²³ (Spiegel, 1981).

Aquesta última es basa en què si els successos $E_1, E_2, \dots, E_k$, poden ocórrer amb probabilitats respectives: $p_1, p_2, \dots, p_k$, aleshores resulta la probabilitat de què: $E_1, E_2, \dots, E_k$, passin $X_1, X_2, \dots, X_k$, cops respectivament, ve donada per l'expressió:

$$(N! / X_1! \cdot X_2! \cdot \dots \cdot X_k!) \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k} = \frac{N!}{X_1! \cdot X_2! \cdot \dots \cdot X_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k} = \frac{N! \cdot \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}}{\prod_{i=1}^k X_i!},$$

$$\text{on: } X_1 + X_2 + \dots + X_k = \sum_{i=1}^k X_i = N.$$

Aquesta distribució teòrica de probabilitat, que constitueix una generalització de la coneguda distribució binomial²⁴, s'anomena *distribució multinomial* que ha estat relacionada, ja que l'expressió anterior és el terme general del desenvolupament multinomial: $(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^N$. Els números teòrics per tal que apareguin els successos: $E_1, E_2, \dots, E_k$, en N repeticions, són els següents: $Np_1, Np_2, \dots, Np_k$, respectivament.

El "coeficient de contingència" C de Pearson deriva de l'estadístic anterior, i mesura el grau d'interdependència (relació, associació) entre 2 atributs. A major valor de C major és també el grau d'associació entre ambdós.

En aquest cas, la χ^2 corregida ofereix un valor segons la taula 9 de:

$$\chi^2 = \frac{(|13.67 - 10| - 0.5)^2}{10} + \frac{(|10.98 - 10| - 0.5)^2}{10} + \dots + \frac{(|9.11 - 10| - 0.5)^2}{10} = 1.154,$$

$$\text{amb un "coeficient de contingència" de: } C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{1.154}{1.154 + 100}} = 0.107.$$

El camp de variabilitat de l'esmentat coeficient C vindrà donat per:

²³ En teoria de la probabilitat, la distribució multinomial o distribució multinòmica és una generalització de la distribució binomial. La distribució binomial és la probabilitat d'un nombre d'èxits a N successos de Bernoulli independents, amb la mateixa probabilitat d'èxit a cada esdeveniment. En una distribució multinomial, l'anàleg a la distribució de Bernoulli és la distribució categòrica.

²⁴ Una distribució binomial, en Estadística, és una distribució de probabilitat discreta (funció que assigna a cada succés definit sobre la variable la probabilitat que es produeixi aquest esdeveniment) que descriu el nombre d'èxits en realitzar n experiments o assajos de Bernoulli independents entre si, sobre una variable aleatòria. La distribució binomial es defineix com una sèrie d'experiments o assaigs en què només podem tenir 2 possibles resultats (èxit o fracàs), i l'èxit és la variable aleatòria.

- Si $\chi^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{(d_i \rightarrow 0)} \lim_{\chi^2 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = 0$; si $d_i \rightarrow 0 \Rightarrow$ existeix independència entre els atributs analitzats.
- Si $\chi^2 \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{(d_i \rightarrow \infty)} \lim_{\chi^2 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \lim_{\chi^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{n}{\chi^2}} = 1$, en este caso $d_i \rightarrow \infty \Rightarrow$

existeix dependència entre els atributs, o sigui, C : $0 \leq C \leq 1$, o bé, $C \in [0, 1]$.

d_i = són las discrepàncies o diferències existents entre els valors reals i els teòrics o esperats, de manera que es poden produir les situacions extremes relacionades.

En qualsevol cas, per poder excloure -a més de l'efecte de la mida de la mostra- la influència de la dimensió de la taula (el nombre de formes de la característica) sobre el límit superior del C i assegurar així la comparabilitat dels resultats, s'utilitza el C corregit de la manera següent:

$$C(\text{corregida}) = \sqrt{\frac{k}{k-1}} \times C = \sqrt{\frac{2}{1}} \times 0.107 = 0.151,$$

i el seu valor indica que es tracta de característiques independents.

També es poden emprar altres coeficients com ara el de Cramers V (que és una mesura simètrica per a la intensitat de la relació entre dues o més variables de l'escala nominal quan, almenys, una de les dues variables té dues formes), el Φ (també anomenat coeficient de correlació de quatre camps) o la contingència quadràtica mitjana $\chi^2/2$ (quant major sigui aquesta mesura tant serà més intensa la relació existent entre les dues característiques analitzades), conduint tots ells a conclusions similars.

7. MOSTREIG ESTRATIFICAT

7.1. Objecte

Una manera alternativa de procedir consisteix a fer un mostreig estratificat sobre el conjunt dels nombres naturals, i s'ha de determinar quina part de la mostra s'ha d'extreure de cada estrat, cosa que es pot dur a terme mitjançant quatre procediments generals d'afixació: uniforme, proporcional, òptima i valoral. Així, per exemple, en el cas que ens ocupa, amb una població analitzada de $N = 10000$ nombres naturals que es divideix a conveniència en 3 subpoblacions o estrats de mides $N_1 = 5000$, $N_2 = 3000$ i $N_3 = 2000$ elements, es desitja, una vegada realitzada l'estimació pertinent, extreure una mostra del 10% ($n = 1000$ elements o números naturals) dividida en tres submostres de mides respectives n_1 , n_2 i n_3 , la qual cosa es duu a terme pels procediments indicats. Es pot veure, al respecte, la Taula 6 amb la distinció colorimètrica de les tres submostres inicialment considerades.

7.2. Afixació uniforme

Vindrà donada simplement per:

$$n_1 = n_2 = n_3 = n/3 = 1000/3 \cong 333 \text{ números naturals.}$$

7.3. Afixació proporcional

Vindrà donada per:

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_3}{N_3} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{n}{N}; \text{ o sigui:}$$

$$\frac{n_1}{5000} = \frac{n_2}{3000} = \frac{n_3}{2000} = \frac{1000}{10000}; \text{ d'on:}$$

$$n_1 = 500; n_2 = 300; n_3 = 200.$$

7.4. Afixació òptima

Vindrà donada per:

$$\frac{n_1}{N_1 \cdot \sigma_1} = \frac{n_2}{N_2 \cdot \sigma_2} = \frac{n_3}{N_3 \cdot \sigma_3} = \frac{n}{\sum_{i=1}^3 N_i \cdot \sigma_i}$$

i cal conèixer prèviament els valors de les desviacions típiques σ_1 , σ_2 i σ_3 de cada estrat, la qual cosa es pot portar a terme mitjançant l'extracció de mostres-pilot que tendeix a compensar la possible major heterogeneïtat d'un estrat determinat mitjançant un increment en la grandària de la submostra corresponent. En aquest cas, suposant uns valors:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1500 \text{ (con } CV_1 = 1500/2500 = 0.60) \\ \sigma_2 = 1000 \text{ (con } CV_2 = 1000/1500 = 0.66) \\ \sigma_3 = 1500 \text{ (con } CV_3 = 700/1000 = 0.70) \end{cases}$$

Resultarien aleshores:

$$\frac{n_1}{5000 \times 1500} = \frac{n_2}{3000 \times 1000} = \frac{n_3}{2000 \times 1500} = \frac{1000}{13500000},$$

d'on: $n_1 = 556$, $n_2 = 222$ y $n_3 = 222$.

S'observa clarament que la major variabilitat (CV) de l'estrat N_3 obliga a incrementar la grandària de la submostra corresponent n_3 en relació al cas anterior de l'afixació proporcional.

Malgrat la determinació anterior, que està basada en un simple supòsit, s'han calculat específicament les desviacions típiques o "standard" de tres submostres o estrats més homogenis en relació a la seva respectiva grandària,

o sigui: $N_1 = 4000$, $N_2 = 3000$ i $N_3 = 3000$ elements. Es desitja, un cop realitzada l'estimació pertinent, extreure una mostra amb un nivell de confiança del 95% ($z = 1.96$) i un marge d'error del 2%, amb $p = 0.12$ i $q = 0.88$. Això és així perquè la proporció d'elements que tenen -a la població- la característica d'ésser nombres primers és del 12.29% (veure taula 8) i el seu complementari és del 87.71%. La mostra a obtenir restarà dividida en tres submostres de grandàries respectives n_1 , n_2 i n_3 , qüestió que es porta a terme pels procediments indicats.

La seva grandària necessària serà, per a una població finita:

$$n = \frac{N \times z^2 \times p \times q}{(N-1) \times e^2 + z^2 \times p \times q} = \frac{10000 \times 1.96^2 \times 0.12 \times 0.88}{9999 \times 0.02^2 + 1.96^2 \times 0.12 \times 0.88} = 921.$$

La grandària requerida de la mostra, amb aquests condicionants, és doncs de 921 elements, que arrodonim a 1000 a efectes pràctics i per raons de seguretat (aplicant el principi de prudència), havent-se obtingut els següents resultats de les desviacions típiques i mitjanes aritmètiques de cada submostra, que ofereixen una versió més real del problema plantejat, i poden observar-se a la següent taula amb els resultats obtinguts de les 3 submostres.

Taula 10. Característiques de la distribució dels nombres primers (de l'1 al 10000)

Submostra	Desv. típica σ	Mitjana aritm. $\bar{X}$	Coef. Variac. CV	Grandària
1	1306	1862	0.70	n_1
2	3016	5494	0.55	n_2
3	4639	8515	0.55	n_3
Població	2922.1	4677.4	0.62	N

En aquest cas real caldrà realitzar una afixació òptima, en relació a la variabilitat (CV) de cada submostra. En tractar-se de mitjanes aritmètiques diferents per a cada submostra, procedeix realitzar aquesta afixació òptima en base als respectius coeficients de variació de Pearson, com a mesura relativa de la dispersió de la variable aleatòria estadística, amb la qual cosa:

$$\frac{n_1}{N_1 \times CV_1} = \frac{n_2}{N_2 \times CV_2} = \frac{n_3}{N_3 \times CV_3} = \frac{n}{\sum_{i=1}^3 N_i \times CV_i},$$

i aleshores:

$$\frac{n_1}{4000 \times 0.7} = \frac{n_2}{3000 \times 0.55} = \frac{n_3}{3000 \times 0.55} = \frac{1000}{6100}, \text{ d'on:}$$

$$n_1 = 459; \quad n_2 = 270; \quad n_3 = 271.$$

7.5. Afixació valoral

En alguns casos es podrien introduir -de conèixer-se o calcular-se prèviament- factors econòmics de cost o despesa c_1 , c_2 i c_3 per a l'obtenció de cada submostra, qüestió aquesta que entenem no procedeix tenir en compte en el supòsit aquí desenvolupat.

8. MECANISME GENERADOR DE NOMBRES PRIMERS

Pel que fa a les funcions generadores (o millor cercadores) de nombres primers, en general, vegem que Owens (2008) afirma que un nombre primer és un enter positiu el qual té exactament dos divisors positius diferents. D'altra banda, Prieto (2013) afegeix que un nombre natural és primer si té exactament dos divisors diferents: l'1 i ell mateix.

Segons Rowland (2008), persisteix la creença que els nombres primers estan distribuïts de manera aleatòria i aquesta intuïció ha portat tradicionalment els matemàtics a despertar el seu interès sobre aquelles funcions que cerquen nombres primers de manera fiable.

Xiao (2015) comenta que les evidències del coneixement sobre nombres primers es remunten a la civilització egípcia, i des de llavors s'han proposat diverses fórmules que generen només alguns nombres primers.

Ribenboim (1995) esmenta que hi ha tres classes de funcions generadores de nombres primers i que les podem englobar en tres classificacions principals, és a dir:

- Una funció que produeix a l'enèsim nombre primer $f(n) = P_n$.
- Una funció $f(n)$ que genera sempre un primer, i $f(n) \neq f(m)$ per a $m \neq n$.
- El conjunt de valors positius de f és igual al conjunt dels nombres primers.

Si definim ara l'anomenada “funció comptador” $\pi(x)$ com el número de nombres primers menors o iguals que x , vegem que el teorema del nombre primer afirma que $\pi(x) \sim x/\log x$. O dit en altres paraules, la probabilitat de què un enter de grandària n sigui un nombre primer és aproximadament $1/\log n$. Aquesta funció recompta el número de nombres primers menors o iguals a un cert número real x . Es denota mitjançant $\pi(x)$, que no s'ha de confondre amb el famós número irracional π , i analíticament es defineix com:

$$\pi(x) = \{p \in P / p \leq x\}.$$

Chen and Wang (1989) aconseguiren substituir la imprecisa expressió “suficientment gran” per “tot imparell major que 4×10^{30} ”. Nogensmenys, aquest número és encara massa gran com per a comprovar si els imparells anteriors són representables com a suma de tres nombres primers. J.M. Deshouillers, G. Effinger, H. te Riele i D. Zinoviev, tot assumint la Hipòtesi de Riemann generalitzada, han aconseguit rebaixar aquest número fins 2×10^{12} , molt més accessible a les tècniques de computació actuals (Cilleruelo, 2013).

Una fórmula dels nombres primers seria aquella que generés els nombres primers, exactament i sense cap excepció. Una altra gran qüestió és què es considera com una «fórmula»²⁵ i què no. No existeix, avui dia, cap fórmula polinòmica per obtenir tots els nombres primers. Es pot objectar que el terme «fórmula» es restringeix només als polinomis. Podrien utilitzar-se sumatòries, factorials i la funció pis? Si fos així, de fet, sí que hi ha fórmules per tal d'obtenir nombres primers. Una interpretació raonable de la paraula "fórmula" és la d'una màquina de Turing²⁶ que s'atura sota totes les entrades. Sota aquesta interpretació, certament existeixen màquines de Turing que s'aturen, capaces de computar l'enèsim nombre primer. Tot i així, no se sap ben bé com calcular l'enèsim nombre primer en temps polinòmic, és a dir, encara no es coneix alguna fórmula fàcilment computable.

Hi ha diverses fórmules polinòmiques que generen tots els nombres primers, i només els nombres primers. En particular, l'extensíssima proposta per Jones *et al.* el 1976 és l'exemple més conegut. Per descomptat, la deducció d'aquest polinomi és complicada. Es basa en un teorema de la dècada anterior que diu que qualsevol conjunt definit de forma recurrentment numerable, com el dels nombres primers, es pot descriure de forma polinomial. Al seu dia, la publicació d'un teorema d'aquesta magnitud va assolir una gran repercussió, ja que tancava segles de recerca matemàtica.

No obstant això, encara que la fórmula constitueix un èxit de la Teoria de Números, no té utilitat pràctica total, ja que no permet saber, per endavant, si el resultat serà positiu (i primer) o negatiu (i inútil), existint, per cert, moltes més possibilitats que surti negatiu, encara que reconeguem que, a nivell teòric, la fórmula resulta molt impactant. D'aquesta manera, el problema de generar nombres primers roman obert.

Per a números relativament petits, és possible simplement aplicar la divisió de prova a cada nombre imparell o senar successiu. Els tamisos primaris gairebé sempre són més ràpids. El tamisat de nombres primers és la forma més ràpida coneguda d'enumerar-los de manera determinista. Hi ha algunes fórmules conegudes que poden calcular el següent nombre primer, però no es coneix una manera d'expressar-ho en termes dels nombres primers anteriors. A més, no es coneix cap manipulació general efectiva i/o extensió d'alguna expressió matemàtica (fins i tot aquelles que incloguin nombres primers posteriors) que calculi, de manera determinista, el següent nombre primer.

Si seguim aplicant la teoria dels números algebraics, es pot mostrar un resultat encara major: no existeix una funció polinòmica no constant $P(n)$ que avaluï a

²⁵ A les ciències, s'anomenen "fórmules" al conjunt d'operacions bàsiques que, mitjançant símbols i valors numèrics diversos, permeten resoldre operacions de càlcul i obtenir resultats concrets com a conseqüència de la seva aplicació.

²⁶ La màquina de Turing és un model matemàtic que simula el funcionament d'un ordinador mitjançant una cinta infinita i un cap lector-escriptor. És capaç de realitzar qualsevol operació computacional si se li dona un conjunt de regles, cosa que la converteix en un concepte clau en la teoria de la computació. Una manera fàcil d'entendre-ho és imaginar una cinta de paper (com les que usen les antigues calculadores) que es pot moure cap a l'esquerra o la dreta, i sobre la qual s'escriuen i es llegeixen símbols. Aquest procés està controlat per una sèrie de regles que indiquen què cal fer en cada situació.

un nombre primer per a gairebé tots els enters n . Així, el polinomi quadràtic d'Euler: $P(n) = n^2 + n + 41$, retorna alguns nombres primers para tots els enters no negatius < 40 . Els nombres primers $\forall n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ són, respectivament: 41, 43, 47, 53, 61, ... Les diferències entre els termes són: 2, 4, 6, 8, 10, ... Per a $n = 40$, es produeix un número quadrat, 1681, el qual és igual a 41×41 , o sigui, constitueix el menor número compost per aquesta fórmula. De fet, si 41 divideix a n , també divideix a $P(n)$.

Aquest fenomen es relaciona amb la coneguda “espiral d'Ulam”²⁷, la qual també és implícitament quadràtica.

Tots els nombres primers, excepte el 2 com sabem, són senars. Com que en l'espiral d'Ulam les diagonals adjacents són alternativament parells i senars, no és estrany que tots els nombres primers se situïn sobre diagonals alternades de l'espiral d'Ulam. El que és sorprenent és la tendència dels primers a situar-se més en algunes diagonals que en d'altres. Els tests efectuats fins ara confirmen que hi ha diagonals fins i tot quan es dibuixen molts nombres. El patró sembla aparèixer també si el nombre al centre no és l'1 (i pot ser, de fet, molt major que 1). Això implica que hi ha molts nombres enters b i c tals que la funció polinòmica: $f(n) = 4n^2 + bn + c$ genera un nombre de primers a mesura que n creix que és gran en comparació amb la proporció de primers entre nombres de magnitud similar. Aquesta troballa va ser tan important que l'espiral d'Ulam va aparèixer a la portada del *Scientific American* el març de 1964. A una distància suficient del centre, les línies horitzontals i verticals també són clarament visibles. Altres variants de l'espiral d'Ulam, com l'espiral de Sacks, també produeixen intrigants patrons, que encara no s'expliquen.

Cert és que mitjançant interpolació podem construir un polinomi $P(n)$ que generi els nombres primers que vulguem a partir dels valors que elegim (per exemple, un polinomi que doni uns certs nombres primers concrets per a n , des de 0 a 1000), però possiblement el seu grau ens resulti enorme i amb uns coeficients força complicats. El més interessant de l'expressat polinomi d'Euler és, sens dubte, el seu baix grau, 2, així com els seus senzills coeficients.

Hi ha també altres polinomis, d'expressió prou senzilla, que generen una acceptable quantitat de nombres primers. Un d'ells, per exemple, és el de $2n$ grau: $P(n) = n^2 - n + 41$, que és pràcticament igual a l'anterior...i que en realitat no aporta gaire més informació a l'assumpte que ara mateix ens ocupa. Ofereix nombres primers per a n de 0 a 40 (és a dir, un més que el polinomi anterior), però dels números naturals 1 a 40 surten els mateixos que en el cas anterior i el que dóna de més és repetit. Concretament és el 41, que apareix per a n igual a 0 i a 1. Hi ha d'altres polinomis molt més complexos que aquests, tant en el seu grau com en llurs coeficients.

²⁷ L'Espirale d'Ulam, un descobriment realitzat pel matemàtic polonès Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984) el 1963, representa un fascinant pont entre la curiositat humana i el poder de la visualització matemàtica. Aquest fenomen va sorgir d'un moment aparentment trivial, mentre Ulam feia gargots durant una reunió. Tot i això, el que va emergir d'aquest acte casual va ser una eina capaç de revelar patrons ocults en els nombres primers, generant una nova forma de percebre la distribució d'aquests números fonamentals que són objecte del nostre estudi.

I cal preguntar-se, hi haurà algun polinomi que doni sempre nombres primers? Doncs no, no n'hi ha. El mateix Goldbach va demostrar que, amb coeficients enters, no és possible trobar un polinomi que doni nombres primers per a qualsevol nombre natural, i més tard Legendre va demostrar el mateix per a les funcions algebraïques racionals.

Tornant al polinomi inicial d'Euler, $n^2 + n + 41$, té algun interès veure què passa amb aquest polinomi, en el sentit de *generar* nombres primers, si es canvia el terme independent 41 per un altre número. Per a quins números tindrem un polinomi *semblant*? Concretament, cerquem els números enters positius t tals que $n^2 + n + t$ genera números primers des de $n = 0$ fins $n = t - 2$. Se sap que això només passa amb 6 números enters, que són precisament els següents: 2, 3, 5, 11, 17, 41, que s'anomenen *números afortunats d'Euler* (*Euler's lucky numbers*).

Tot això es pot veure reflectit a la taula 11 i figura 10 següents:

Taula 11. Generació de nombres primers per a $0 \leq n \leq 39$.

n	p	n	p	n	p	n	p	n	p	n	p
0	41		241		487		751		1031		1303
1	43	14	251		491		757	31	1033		1307
2	47		257		499		761		1039		1319
3	53		263	21	503		761		1049		1321
	59		269		509		773		1051		1327
4	61		271		521		787		1061		1361
	67		277		523	27	797		1063		1367
5	71	15	281		541		809		1069	36	1373
	73		283	22	547		811		1087		1381
	79		293		557		821		1091		1399
6	83		307		563		823		1093		1409
	89		311		569		827	32	1097		1423
7	97	16	313		571		829		1103		1427
	101		317		577		839		1109		1429
	103		331		587	28	853		1117		1433
	107		337	23	593		857		1123		1439
	109	17	347		599		859		1129	37	1447
8	113		349		601		863		1151		1451
	127		353		607		877		1153		1453
9	131		359		613		881	33	1163		1459
	137		367		617		883		1171		1471
	139		373		619		887		1181		1481
	149		379		631		907		1187		1483
10	151	18	383	24	641	29	911		1193		1487
	157		389		643		919		1201		1489
	163		397		647		929		1213		1493
	167		401		653		937		1217		1499
11	173		409		659		941		1223		1511
	179		419		661		947		1229	38	1523
	181	19	421		673		953	34	1231		1531
	191		431		677		967		1237		1543
	193		433		683	30	971		1249		1549
12	197		439	25	691		977		1259		1553
	199		443		701		983		1277		1559
	211		449		709		991		1279		1567
13	223		457		719		997		1283		1571
	227	20	461		727		1009		1289		1579
	229		463		733		1013		1291		1583
	233		467		739		1019		1297		1597
	239		479	26	743		1021	35	1301	39	1601

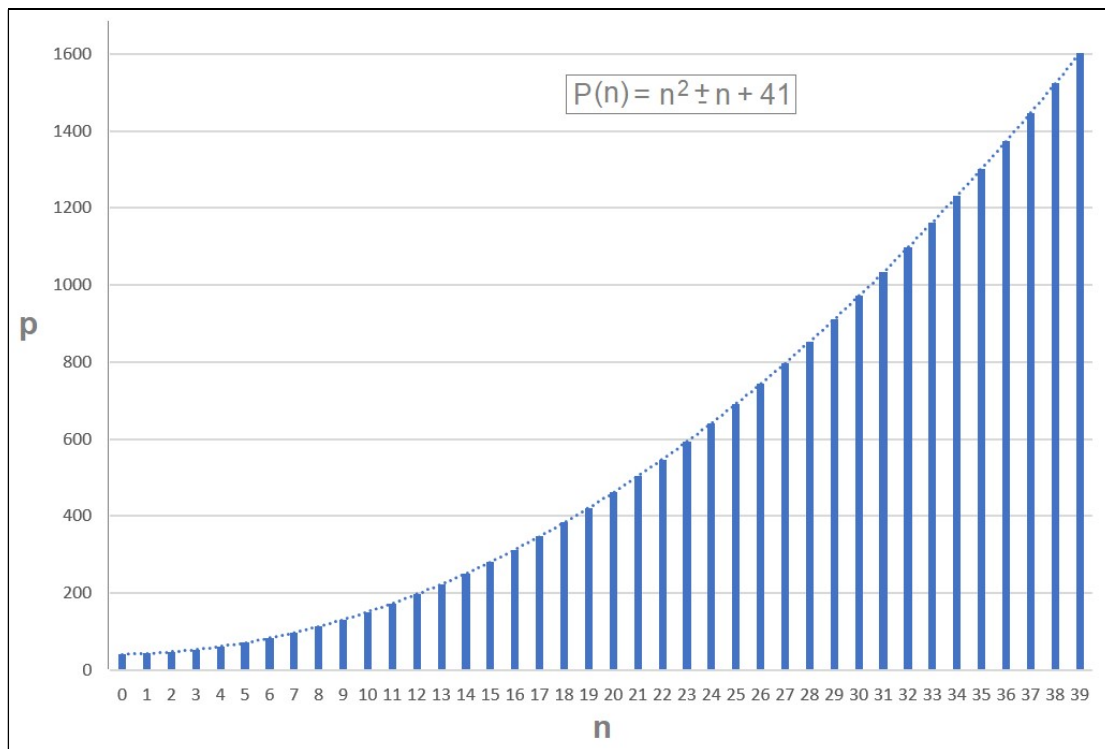


Fig. 10. Polinomi d'Euler generador de nombres primers.

Camacho (2021) i altres autors han formulat diverses propostes al respecte. Pot ser que l'expressió més senzilla i famosa en aquest assumpte sigui el polinomi quadràtic d'Euler ja esmentat, trobat l'any 1772. Substituint el valor de n per qualsevol nombre natural del 0 al 39, el resultat obtingut és un nombre primer. Malauradament, la fórmula d'Euler no té gaire més que oferir. En primer lloc, perquè com s'ha vist, en provar amb $n = 40$ ens torna un nombre compost i perd bona part del seu encant, ja que no genera més nombres primers. I després, perquè no produeix tots els números primers: només alguns, i sempre més grans de 41. És impossible, per exemple, que aquesta fórmula generi el 2, l'11 o el 17.

Basant-nos ara en el teorema de Dirichlet (1805-1859) sobre les progressions aritmètiques, se sap que funcions lineals del tipus: $f(x) = ax + b$ produeixen infinits nombres primers sempre que a i b siguin nombres primers relatius (encara que aquesta funció no assumirà valors primers per a qualsevol x). No es coneix si hi ha un polinomi d'una variable i primitiu, amb el seu grau més gran que 2, que generi un nombre infinit de valors que són primers.

Altrament, un teorema general del matemàtic rus Matiyasévich (1947-) diu que si un determinat conjunt es defineix per un conjunt d'equacions diofàntiques, també es pot definir per un sistema d'equacions diofàntiques amb només 9 variables. Per tant, hi ha un polinomi que genera nombres primers com l'anterior de tan sols 10 variables. Tot i això, el grau d'aquest polinomi és molt gran (de l'ordre de 10^{45}). Vist altrament, també podem transformar aquest polinomi a un altre de grau 4, però aquest cop amb 58 variables explicatives.

Existeixen diverses fórmules polinòmiques que generen *tots* els nombres primers, i *només* els nombres primers. En particular, la proposada per Jones *et al.*, per l'any 1976, és potser l'exemple més conegut. Aquest polinomi, de grau 25, produeix tots els nombres primers que existeixen. El seu aspecte és complex, però no resulta difícil d'utilitzar: escollint un valor natural per a cadascuna de les seves 26 variables (per exemple, $a = 1$, $b = 2$, ..., $z = 26$) i substituint-lo al polinomi. Si el resultat és un nombre positiu, llavors serà primer. Si és negatiu, lògicament s'ha de descartar. Així, segons es van proporcionant successivament valors a totes les variables, es van obtenint tots els nombres primers que hi ha, sense excepcions.

Per descomptat, la deducció d'aquest polinomi va resultar molt complicada. Es basava en un teorema de la dècada anterior que diu que “qualsevol conjunt definit de manera recurrentment enumerable, com el dels nombres primers, es pot descriure de forma polinomial”. Al seu dia, la publicació d'un teorema d'aquesta magnitud va cridar l'atenció extraordinàriament, ja que tancava segles de recerca matemàtica.

En qualsevol cas, encara que aquesta última fórmula es pot considerar un èxit de la teoria de nombres, no posseeix una indiscutible utilitat pràctica, ja que no permet saber per endavant si el resultat serà positiu (i primer) o negatiu (i inútil a aquests efectes), existint, per cert, moltes més possibilitats que surti negatiu. Tot i que cal reconèixer que, a nivell teòric, l'esforç desplegat pels seus autors fou notable, no és, doncs, una fórmula pràctica per tal de trobar tots els nombres primers.

També hi ha d'altres polinomis senzills que generen nombres primers. A continuació presentem una recopilació d'algunes fórmules polinòmiques, les que hem considerat més interessants, ja que, com es pot consultar a la literatura especialitzada, n'hi ha de centenars. Així:

- $n^3 + n^2 + 17$, que ofereix 11 primers distints per a n des de 0 fins a 10.
- $2n^2 + 11$, igual que l'anterior.
- $2n^2 + 29$, que dona 29 primers distints per a n des de 0 fins a 28.
- $36n^2 - 810n + 2753$, que ofereix 45 primers distints per a n des de 0 fins a 44.

En qualsevol cas, en la teoria de nombres computacional, una notable varietat d'algorismes fan possible generar nombres primers de manera eficient. S'utilitzen en diverses aplicacions, com ara en la generació de funcions hash²⁸, criptografia de clau pública i cerca de factors primers en grans quantitats.

²⁸ Un hash és el resultat d'aplicar una funció matemàtica que pren una entrada i la transforma en una cadena de caràcters, generalment una representació alfanumèrica de longitud fixa de les dades d'entrada. És a dir, és un codi format per lletres i números que resumeix o representa un conjunt de dades determinades. Per exemple, podria ser un codi que representi un vídeo, una fotografia o un document. La característica distintiva d'una funció 'hash' és que, partint d'un conjunt de dades d'entrada determinat, sempre es generarà el mateix valor alfanumèric. És a dir, és un codi únic per a aquestes dades. Addicionalment, hi ha dues característiques importants a considerar. D'una banda, la probabilitat d'identificar dos conjunts de dades que corresponguin al mateix hash és extremadament baixa. D'altra banda, un petit canvi a les dades d'entrada resultarà en un valor completament diferent del 'hash'.

PART II. PLANTEJAMENT I DEMOSTRACIONS

1. LA CONJECTURA FORTA O BINÀRIA DE GOLDBACH (plantejament)

S'entén així:

“Tot número parell (major que 2) pot expressar-se com a suma de dos nombres primers”. El primer d'ells: $4 = 2 + 2$.

Estem operant en el conjunt dels números enters positius o naturals $Z^+ = N$, i partim de les següents

HIPÒTESIS AXIOMÀTIQUES SIMPLES:

1) Tots els nombres primers són imparells a excepció del 2 i sumant-los o restant-los la unitat s'obté un nombre compost parell.

2) La suma de dos números parells o dos imparells és un altre número parell.

3) Si sumem o restem dues unitats a un número parell s'obté un altre número parell i el mateix succeeix amb els números imparells (s'obté un altre número imparell).

TESI:

En efecte, sigui: $N = p_1 + p_2$ $\begin{cases} N = \text{número par} > 2 \\ p_1 \text{ y } p_2 \text{ son primos} \end{cases}$

i la suma de dos nombres primers (imparells) és sempre una quantitat parell, segons l'anterior hipòtesi 2).

Sumant 2 unitats a ambdós membres de la igualtat anterior (al mateix resultat pot arribar-se restant 2 unitats a aquests membres) es té que:

$$\underbrace{N \pm 2}_{\text{par } 3} = \underbrace{(p_1 \pm 1)}_{\text{par } 1} + \underbrace{(p_2 \pm 1)}_{\text{par } 1} = p_1 + p_2 \pm 2. \text{ I així successivament. Partint de:}$$

$$\begin{aligned} \overset{\text{Par}}{N \pm 0} &= \overset{\text{Impar}}{(p_1 \pm 0)} + \overset{\text{Impar}}{(p_2 \pm 0)} = p_1 + p_2 \\ \overset{\text{P}}{N \pm 2} &= \overset{\text{P}}{(p_1 \pm 1)} + \overset{\text{P}}{(p_2 \pm 1)} = p_1 + p_2 \pm 2 \\ \overset{\text{P}}{N \pm 4} &= \overset{\text{I}}{(p_1 \pm 2)} + \overset{\text{I}}{(p_2 \pm 2)} = p_1 + p_2 \pm 4 \\ \overset{\text{P}}{N \pm 6} &= \overset{\text{P}}{(p_1 \pm 3)} + \overset{\text{P}}{(p_2 \pm 3)} = p_1 + p_2 \pm 6 \\ &\dots \end{aligned}$$

Representant per: P = parell i I = imparell o senar.

2. LA CONJECTURA FEBLE O TERNÀRIA DE GOLDBACH (plantejament)

S'entén així:

“Tot número imparell suficientment gran (major que 5) pot expressar-se com a suma de tres números primers”. El primer d'ells seria: $7 = 2 + 2 + 3$. El segon seria: $9 = 2 + 2 + 5$. El tercer seria: $11 = 3 + 3 + 5$. El quart d'ells, aleshores, seria: $13 = 3 + 5 + 5$. I així successivament.

Partim ara de les següents

HIPÒTESIS AXIOMÀTIQUES SIMPLES:

1) La suma de tres números parells es un altre número parell (el recíproc no és pas cert) i la suma de tres números imparells es un altre número imparell.

2) Si sumem o restem tres unitats a un número imparell s'obté un número parell, ja que sumant-li o restant-li dues unitats s'obté un número imparell i afegint-li o restant-li una unitat més s'obté un número parell.

3) Si sumem o restem una unitat a un nombre primer, a excepció del 2 que és parell, s'obté un número compost parell.

TESI:

En efecte, sigui: $N = p_1 + p_2 + p_3$ $\begin{cases} N = \text{número impar} > 5 \\ p_1, p_2 \text{ y } p_3 \text{ son primos} \end{cases}$

i la suma de tres nombres primers (imparells) és una quantitat imparell segons la hipòtesi 1).

Sumant ara 3 unitats als dos membres de la igualtat anterior (el mateix resultat pot assolir-se restant 3 unitats als esmentats membres) es té que:

$$\underbrace{N \pm 3}_{\text{par } 2)} = \overbrace{(p_1 \pm 1) + (p_2 \pm 1) + (p_3 \pm 1)}^{\text{par } 1)} = p_1 + p_2 + p_3 \pm 3$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{par } 3)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{par } 3)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{par } 3)}$

La conjectura dèbil de Goldbach és certa, ja que:

$\forall N > 5 \Rightarrow N = p_1 + p_2 + p_3$, perquè ja està demostrada (Helfgott, 2013).

De fet, aquesta conjectura dèbil o ternària ja ha estat demostrada per procediments molt prolixos (més de 200 pàgines) per H. Helfgott continuant els treballs de Hardy-Wright (1997), Littlewood (1914), Vinogradov (1937), Lin, Wang (1984), Chen Jing-run (1973) i d'altres, amb l'excepció ja comentada de la seva publicació en revista indexada.

Les conjectures següents poden fer-se extensives segons el número de sumands primers que intervenen. Així, podríem enunciar que “qualsevol

número par suficientment gran (major que 6) pot expressar-se como a suma de quatre nombres primers”. El primer d’ells podria ser el $8 = 2 + 2 + 2 + 2$, seguit del $10 = 2 + 2 + 3 + 3$. El tercer seria: $12 = 2 + 2 + 3 + 5$. El quart, aleshores, seria: $14 = 2 + 2 + 5 + 5$. I així successivament.

Un resultat interessant que s’ha aconseguit provar és que **tot número parell es pot escriure com a suma de, com a molt, 6 nombres primers** (Olivier, 1991). Seria necessari, no obstant això, analitzar específicament cadascuna d’aquestes conjetures i resultats.

Sumant algebraicament alhora 4 unitats als dos membres de la igualtat anterior (el mateix resultat pot assolir-se restant 4 unitats a aquells membres) es tindria que:

$$\underbrace{N \pm 4}_{\text{par } 2)} = \overbrace{(\underbrace{p_1 \pm 1}_{\text{par } 3)} + (\underbrace{p_2 \pm 1}_{\text{par } 3)} + (\underbrace{p_3 \pm 1}_{\text{par } 3)} + (\underbrace{p_4 \pm 1}_{\text{par } 3}))}_{\text{par } 1)} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \pm 4$$

També la Teoria de Sedassos ha reportat un recolzament important en l’estudi del problema general que avui ens ocupa, tot partint de l’antic sedàs d’Eratòstens (276-194 a. C.), una forma especial de la qual fou exposada per Euler molts segles després.

3. LES DIFERENTS MITJANES DE DOS NOMBRES PRIMERS (demostració)

A continuació, es presenta un gràfic representatiu, en la Fig. 11, amb la construcció geomètrica per tal de trobar les mitjanes aritmètica ($\bar{X}$), quadràtica (C), geomètrica (G) i harmònica (H) de dos nombres primers qualssevol p_1 y p_2 la suma dels quals constitueix el número parell natural N.

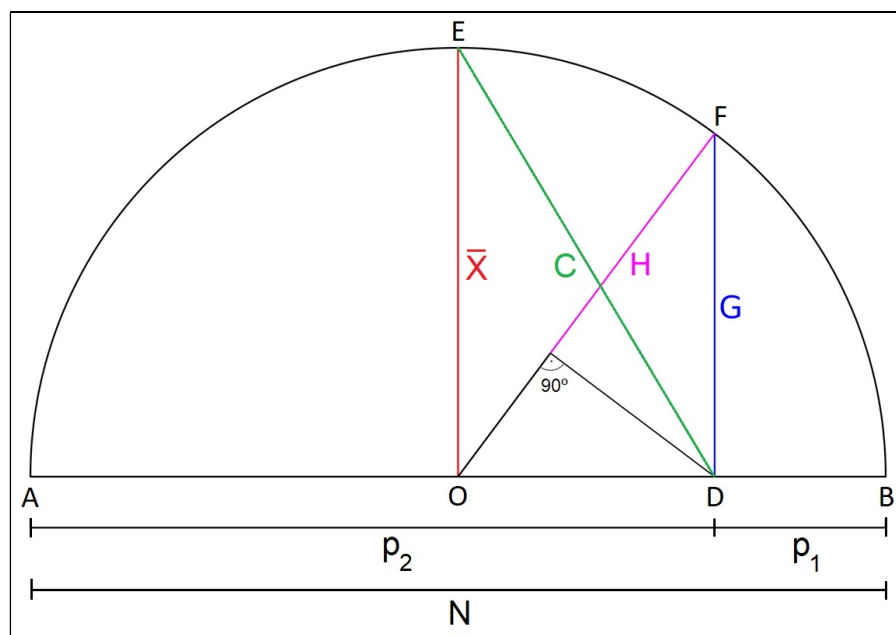


Fig. 11. Construcció geomètrica de les quatre mitjanes emprades.

Considerem ara que, en el cas de la conjectura forta de Goldbach que tractem de demostrar, se sumen 2 nombres primers p_1 (segment $\overline{BD}$) i p_2 (segment $\overline{AD}$) per tal d'obtenir sempre un número parell natural N (segment $\overline{AB}$).

Les diferents mitjanes clàssiques d'aquests dos nombres primers apareixen definides així:

$$\boxed{H = \frac{2}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} = \frac{2}{\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2}} = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}}$$

$$G = \sqrt{p_1 p_2}; \quad \bar{X} = \frac{p_1 + p_2}{2}; \quad C = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2}}$$

Anem a demostrar, en primer lloc, que $H \leq G$, o sigui:

$$\frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} \leq \sqrt{p_1 p_2}$$

Elevant al quadrat els membres de l'anterior desigualtat i operant adientment, s'obté:

$$4p_1^2 p_2^2 \leq p_1 p_2 (p_1 + p_2)^2 \quad ; \quad 4p_1 p_2 \leq (p_1 + p_2)^2$$

$$4p_1 p_2 \leq p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \quad ; \quad 0 \leq p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2$$

$$0 \leq (p_1 - p_2)^2$$

Amb això queda demostrat que $H \leq G$. D'altra banda, $G \leq \bar{X}$, ja que:

$$\sqrt{p_1 p_2} \leq \frac{p_1 + p_2}{2} \quad ; \quad 4p_1 p_2 \leq (p_1 + p_2)^2$$

Aleshores, es tindrà que: $0 \leq (p_1 - p_2)^2$, per tant, es posa de manifest clarament que $H \leq G \leq \bar{X}$. Per últim, tot tenint en compte la relació que lliga la mitjana quadràtica amb l'aritmètica i la variància, és a dir: $C^2 = \bar{X}^2 + \sigma^2$, es dedueix també que: $\bar{X} \leq C$ (RSM), com es volia demostrar.

Aquesta demostració, a més, es pot generalitzar per a qualsevol número de nombres primers, com per exemple en el cas de la conjectura dèbil o ternària de Goldbach, amb els nombres primers p_1 , p_2 i p_3 . En qualsevol cas, la demostració de la darrera desigualtat també es pot realitzar analíticament a partir de la definició de les dues mitjanes, o sigui:

$$\bar{X} = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad ; \quad C = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2}} \text{ . Llavors:}$$

$$\bar{X}^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2}{4} ; C^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{4} + \frac{p_1^2 + p_2^2}{4} ;$$

$$\bar{X}^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{4} + \frac{p_1p_2}{2} ; C^2 - \bar{X}^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{4} - \frac{p_1p_2}{2} = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4} = \sigma^2$$

Cal observar que aquesta diferència de fraccions ha de ser necessàriament positiva o nul·la. En efecte, es tracta de comparar les expressions:

$\frac{p_1^2 + p_2^2}{4}$ y $\frac{2p_1p_2}{4}$, o més concretament els seus numeradors, o sigui: $p_1^2 + p_2^2$ y $2p_1p_2$. Com es té que el quadrat d'una diferència ofereix el valor:

$$(p_1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \geq 0 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 \geq 2p_1p_2 ;$$

també s'acompleix que: $C^2 \geq \bar{X}^2$, i endemés: $\bar{X} \leq C$ (RMS), c.v.d.

També una altra mesura del valor central d'una distribució de freqüències emprada a l'Estadística és la mitjana cúbica que, per a dades sense agrupar ve donada per l'expressió:

$$M_3 = \sqrt[3]{\frac{\sum p_i^3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{p_1^3 + p_2^3}{2}}$$

Si ara exemplifiquem amb els nombres primers $p_1 = 3$ i $p_2 = 7$, representats per sengles segments la suma dels quals $N = \overline{AB} = 10$ és el diàmetre de la semicircumferència de radi $\bar{X} = \overline{OA} = \overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OB} = 5$ en la construcció geomètrica de la Fig. 10, es tenen els següents valors de les mitjanes:

$$H = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2} = \frac{2 \times 3 \times 7}{3 + 7} = \frac{42}{10} = 4.20 ;$$

$$G = \sqrt{p_1p_2} = \sqrt{3 \times 7} = 4.58 ; \bar{X} = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5.00 ;$$

$$C = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{3^2 + 7^2}{2}} = \sqrt{\frac{9 + 49}{2}} = 5.39$$

$$M_3 = \sqrt[3]{\frac{27 + 343}{2}} = \sqrt[3]{185} = 5.70$$

Confirmant-se la desigualtat ja demostrada:

$$(H = 4.20) < (G = 4.58) < (\bar{X} = 5.00) < (C = 5.39) < (M_3 = 5.70).$$

També cal tenir en compte, pel que es refereix a la variància, que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (p_i - \bar{X})^2 = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p_i^2 \right) - \bar{X}^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \left(\frac{p_1 + p_2}{2} \right)^2 = \dots = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4},$$

i així, en aquest exemple concret, succeeix que:

$$\sigma^2 = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4} = \frac{(3 - 7)^2}{4} = 4, \Rightarrow \sigma = (|p_1 - p_2|)/2 = 2, \text{ i aleshores:}$$

$$CV (\text{Pearson}) = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 = \frac{2}{5} \times 100 = 40\%, \text{ i amb un coeficient d'uniformitat de:}$$

$$100 (1 - CV) = 100 (1 - 0.40) = 60\%.$$

$$\text{Comprovació: } \sigma = (C^2 - \bar{X}^2)^{1/2} = (29 - 5^2)^{1/2} = 4^{1/2} = 2.$$

Pel que es refereix a la mitjana aritmètica $\bar{X}$ de 2 nombres primers p_1 i p_2 (o millor el punt mitjà) vegem que el seu resultat pot ser parell o imparell, i hi ha infinites mitjanes aritmètiques que es poden formar a partir de 2 nombres primers, el nombre dels quals també és infinit com s'ha vist. Conseqüentment, amb aquestes mitjanes es poden formar infinits parells naturals N que es podran expressar com a suma de 2 nombres primers, cosa que constitueix la conjectura forta de Goldbach que es tracta de demostrar. Així:

$$\bar{X} = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{N}{2} \Rightarrow N = 2 \cdot \bar{X} = p_1 + p_2,$$

resultant que el doble de la mitjana aritmètica de 2 nombres primers serà, necessàriament, un nombre natural parell expressat com a suma d'ambdós nombres primers, el que demostra l'esmentada conjectura.

CONCLUSIÓ:

La conjectura forta de Goldbach seria certa, ja que s'acompleix que:

$$\forall N > 2 \Rightarrow N = p_1 + p_2$$

4. UNA APROXIMACIÓ GEOMÈTRICA (demostració)

4.1. Conjectura forta o binària

Un segment és la porció de recta limitada per dos punts, dits “extrems” o “finals”. A diferència d'una semirecta, que té un determinat origen però s'estén infinitament en una direcció, el segment està acotat en ambdós extrems.

En el nostre cas, a la vista de la Fig. 11, assimilant dos segments concatenats, consecutius i col·lineals amb els nombres primers p_1 ($\overline{BD}$) i p_2 ($\overline{AD}$), la seva adició conforma un altre segment de longitud N ($\overline{AB}$) determinat pels extrems no comuns dels segments considerats. El conjunt dels segments mètrics constitueix una magnitud, de la qual els segments són quantitats que assimilarem al cardinal de cada nombre primer p_1 i p_2 . És possible determinar

entre ells relacions i efectuar les operacions definides per als elements d'una magnitud.

Geomètricament, la suma de segments és un altre segment que s'obté construint col·linealment segments ordenadament congruents amb les dades. La suma dels dos segments p_1 i p_2 és un altre segment que té per inici l'origen del primer segment i com a final el final del segon segment. La longitud del segment suma N és igual a la suma de les longituds respectives dels dos segments que el conformen, p_1 i p_2 .

El concepte d'infinít s'utilitza per a moltes qüestions diferents i no s'ha de confondre. Un segment sempre consta d'infinits punts individuals²⁹. Això es pot demostrar rigorosament i no és gens difícil. Bàsicament, entre dos punts diferents d'una línia hi ha un tercer punt ("entre" no hauria de significar necessàriament el punt mitjà d'una trajectòria recta que els connecta). La longitud de la línia és un assumpte diferent. Aquesta pot ser finita o infinita. La totalitat dels punts que componen el segment és, en qualsevol cas, infinita. De fet, es pot demostrar, amb prou facilitat, que la cardinalitat dels punts de qualsevol línia és sempre la mateixa, raó per la qual, en cert sentit, totes les línies tenen la mateixa «quantitat» de punts, encara que la forma en què aquests punts estan disposats pot conferir-li qualitats geomètriques totalment diferents.

En la geometria euclidiana, un segment és una porció de línia recta que s'estén en una mateixa direcció; per tant, té una sola dimensió i conté un nombre infinit de punts, per la qual cosa no resulta possible assignar-li un cardinal. Qualsevol segment amb al menys dos punts té infinits punts perquè, intuïtivament, donats dos punts distints, hi ha un tercer, distint d'ambdós, diguem, el punt mitjà. Això és, es pot representar qualsevol segment N (número natural parell major de 2) com adició de dos segments primers qualssevol (tot exceptuant el nombre primer 2), que resulta una quantitat parella i natural, i el seu número és infinit segons hem vist a l'anterior punt 4 del present treball.

El gir levogir del radi $\overline{OB}$ sobre cadascun dels infinits punts de la semicircumferència determina infinites projeccions verticals sobre el segment $\overline{AB}$ (N) que el particionen en els dos segments mètrics p_1 ($\overline{BD}$) i p_2 ($\overline{AD}$), de longituds iguals quan $D = O$ o bé desiguals quan $D \neq O$, la suma dels quals és igual a N , podent existir infinites parelles de nombres primers (p_1, p_2) que compleixen aquesta condició tot tenint en compte la infinitud demostrada dels nombres primers.

²⁹ A finals del segle XIX, el matemàtic rus-alemany Georg Cantor (1845-1918) va commocionar el món de les matemàtiques, trencant les creences existents fins al moment sobre el concepte d'infinít. Entre els resultats revolucionaris que va demostrar hi ha que hi ha més d'un infinit o bé que la quantitat de punts d'un segment és la mateixa que la quantitat de punts d'un quadrat. Fou l'inventor, juntament amb l'alemany Dedekind (1831-1916), de la Teoria de Conjunts, que és la base de les matemàtiques modernes. Mercès a llurs agosarades recerques sobre els conjunts infinits va ser el primer matemàtic capaç de *formalitzar* la noció d'infinít sota la forma dels números transfinits (cardinals i ordinals).

D'altra banda, de la Fig. 11 es dedueix també gràficament que $N = 2 \cdot \bar{X}$, amb $\bar{X} = \text{constant}$, és a dir, que un mateix nombre parell i natural N es pot representar d'infinites maneres i combinacions $(p_1 + p_2)$ sobre el segment $\overline{AB}$ conforme es produeix el gir de 180° del radi $\overline{OB}$ fins a $\overline{OA}$.

CONCLUSIÓ:

Això podria confirmar que la conjectura forta de Goldbach seria certa, ja que s'acompleix geomètricament que:

$$\forall N > 2 \Rightarrow N = p_1 + p_2$$

4.2. Conjectura dèbil o ternària

El mateix es pot veure en relació a la conjectura feble o ternària de Goldbach, a partir de la següent composició geomètrica:

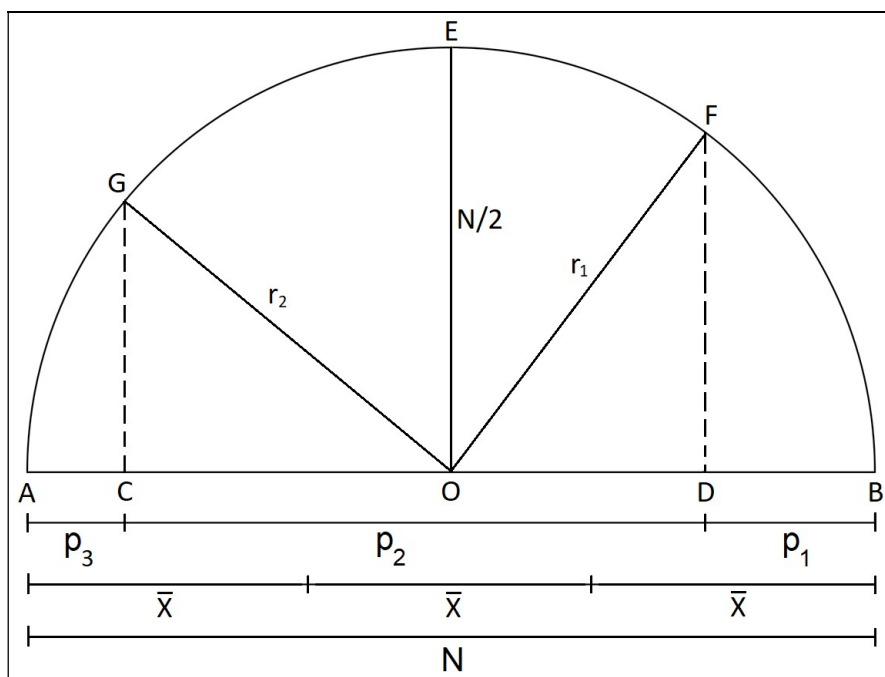


Fig. 12. Construcció geomètrica de la conjectura ternària de Goldbach (I).

Aquí, els radis r_1 i r_2 , de valor $N/2$, poden girar indistintament i en sentits iguals o oposats sobre la semicircumferència AGEFB i les seves projeccions verticals sobre el segment o diàmetre $\overline{AB}(N)$ el particionen en tres trams o parts desiguals (p_1 , p_2 i p_3) o bé iguals (totes elles iguals a $\bar{X}$).

En aquest cas, $N = p_1 + p_2 + p_3$, aleshores:

$$\bar{X} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = \frac{N}{3}, \text{ o sigui, } N = 3\bar{X}.$$

El problema també es pot plantejar geomètricament a partir d'una el·lipse circumscriu a la circumferència (de fet, la primera secció cònica es converteix en la segona amb els seus semieixos iguals i sense excentricitat) i el radi r , de valor $N/2$, que va girant indistintament en ambdós sentits, amb les projeccions verticals sobre el segment $\overline{AB}(N)$ dels seus punts de tall amb l'el·lipse i la circumferència circumscriu (Fig. 13). Les separacions existents entre aquelles projeccions representen els nombres primers sumands.

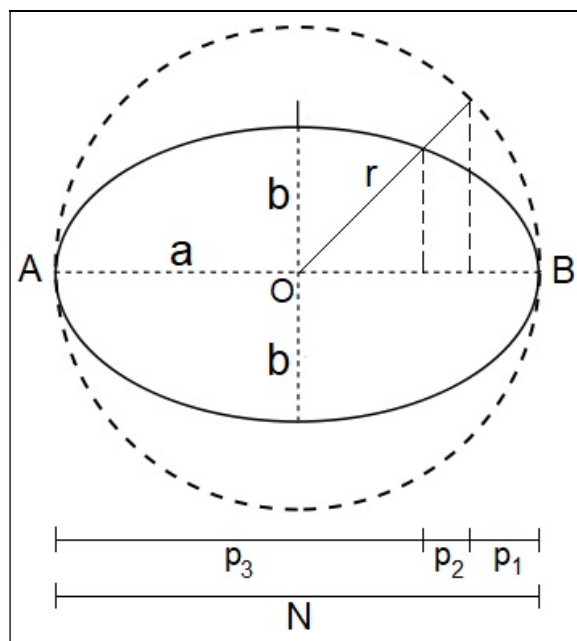


Fig. 13. Construcció geomètrica de la conjectura ternària de Goldbach (II).

Tot això confirma també que la conjectura feble de Goldbach seria certa, ja que s'acompleix geomètricament que:

$$\forall N > 5 \Rightarrow N = p_1 + p_2 + p_3$$

De fet, com els seus nombres suggereixen, la demostració de la conjectura forta ja implicaria la de la conjectura feble, allò que s'aconsegueix restant 3 al seu número imparell o senar i expressant després $N - 3$ (parell) com a suma de dos nombres primers (Helfgott, 2013).

La resolució, a la fi, de la conjectura feble de Goldbach implica un resultat relacionat amb la conjectura forta, i és que **tot nombre parell pot expressar-se, per tant, com a suma de, com a molt molt, 4 nombres primers.**

5. UN ALTRE INTENT DE DEMOSTRACIÓ DE LA CONJECTURA FORTA O BINÀRIA

La “distància o diferència” ($d = \Delta$) que separa dos nombres primers, consecutius o no, és sempre un número natural parell, a excepció dels nombres primers 2 i 3, com pot comprovar-se, per exemple, analitzant els nombres primers continguts en els primers 200 números naturals (veure taula 13), ja que: $(2m + 1) - (2n + 1) = 2(m - n)$. D'aquesta manera:

$$N(d) = p_1 - p_2 = \Delta, \text{ ja que: } p_1 = p_2 + N(d)$$

Consegüentment, ha estat conjeatrat que “Qualsevol número parell natural (N) pot representar-se com a diferència de dos nombres primers”. Això pot comprovar-se a la taula següent dels primers 200 números parells naturals. Així:

Taula 12. Formació de números parells naturals N per la resta de 2 nombres primers (1 a 200).

N	p ₁ -p ₂	N	p ₁ -p ₂	N	p ₁ -p ₂	N	p ₁ -p ₂	N	p ₁ -p ₂
2	--	42	47-5	82	89-7	122	127-5	162	167-5
4	7-3	44	47-3	84	89-5	124	127-3	164	167-3
6	9-3	46	53-7	86	89-3	126	131-5	166	173-7
8	11-3	48	53-5	88	101-13	128	131-3	168	173-5
10	13-3	50	53-3	90	97-7	130	137-7	170	173-3
12	17-5	52	59-7	92	97-5	132	137-5	172	179-7
14	17-3	54	59-5	94	97-3	134	137-3	174	179-5
16	19-3	56	59-3	96	101-5	136	139-3	176	179-3
18	23-5	58	61-3	98	101-3	138	149-11	178	181-3
20	23-3	60	67-7	100	103-3	140	151-11	180	191-11
22	29-7	62	67-5	102	107-5	142	149-7	182	193-11
24	29-5	64	67-3	104	107-3	144	149-5	184	191-7
26	29-3	66	71-5	106	109-3	146	149-3	186	191-5
28	31-3	68	71-3	108	113-5	148	151-3	188	191-3
30	37-7	70	73-3	110	113-3	150	157-7	190	193-3
32	37-5	72	79-7	112	131-19	152	157-5	192	197-5
34	37-3	74	79-5	114	127-13	154	157-3	194	197-3
36	41-5	76	79-3	116	127-11	156	163-7	196	199-3
38	41-3	78	83-5	118	131-13	158	163-5	198	211-13
40	43-3	80	83-3	120	127-7	160	163-3	200	211-11

D'altra banda, les “distàncies o diferències” que separen dos nombres primers consecutius continguts en els primers 200 números naturals es poden veure a la següent taula:

Taula 13. Distàncies existents entre 2 nombres primers consecutius (1 a 200).

Nombre Primer	Diferència Δ	Nombre Primer	Diferència Δ	Nombre Primer	Diferència Δ	Nombre Primer	Diferència Δ
2	1	3	2	5	2	7	4
11	2	13	4	17	2	19	4
23	6	29	2	31	6	37	4
41	2	43	4	47	6	53	6
59	2	61	6	67	4	71	2
73	6	79	4	83	6	89	8
97	4	101	2	103	4	107	2
109	4	113	14	127	4	131	6
137	2	139	10	149	2	151	6
157	6	163	4	167	6	173	6
179	2	181	10	191	2	193	4
197	2	199					

(Quan $\Delta = 2$, es tracta de nombres primers bessons)

A la vista de la taula 12, tot triant a l'atzar els 6 números parells naturals: 10, 12, 14, 80, 94 i 192, i sumant-los un número parell natural convenient (6 o 8, en aquest cas), es forma el següent:

$$\begin{aligned}
 &+6 \left\{ \begin{array}{l} 10 = 13 - 3 \\ \mathbf{16} = 13 - 3 + 6 = \mathbf{13 + 3} \end{array} \right. \\
 &+8 \left\{ \begin{array}{l} 12 = 17 - 5 \\ \mathbf{20} = 17 - 5 + 8 = \mathbf{17 + 3} \end{array} \right. \\
 &+6 \left\{ \begin{array}{l} 14 = 17 - 3 \\ \mathbf{20} = 17 - 3 + 6 = \mathbf{17 + 3} \end{array} \right. \\
 &+6 \left\{ \begin{array}{l} 80 = 83 - 3 \\ \mathbf{86} = 83 - 3 + 6 = \mathbf{83 + 3} \end{array} \right. \\
 &+6 \left\{ \begin{array}{l} 94 = 97 - 3 \\ \mathbf{100} = 97 - 3 + 6 = \mathbf{97 + 3} \end{array} \right. \\
 &+8 \left\{ \begin{array}{l} 192 = 197 - 5 \\ \mathbf{200} = 197 - 5 + 8 = \mathbf{197 + 3} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Aleshores, podríem obtenir qualsevol número parell natural que s'expressaria, sempre necessàriament, com a suma de dos nombres primers (Goldbach). Això resulta clarament presumible, encara que, certament, no es pot generalitzar per l'observació feta d'un número finit de casos.

6. METÀFORA O PARÀBOLA DE LES GOTES D'AIGUA (demostració)

a) Una imatge senzilla que albira tota l'aigua dels oceans, mars i aigües continentals (riu, llacs, embassaments, rierols, ...) del nostre planeta blau pot resultar rellevant pel que fa a l'esclarament del problema que ens ocupa. S'estima que aquesta aigua suposa un volum de 1.386 milions de km³. D'altra banda, algunes experiències realitzades coincideixen a assenyalar que una sola goteta d'aigua cubica, de mitjana, 0.33 ml, és a dir, 330 mm³. Tenint en compte que:

$$1 \text{ km}^3 = 10^9 \text{ m}^3 = 10^{18} \text{ mm}^3 ; 1 \text{ mm}^3 = 0.001 \text{ ml} ; 1 \text{ ml} = 1000 \text{ mm}^3$$

resultarà que l'aigua total superficial de la Terra, o sigui:

$$1386 \times 10^6 \text{ km}^3 = 1386 \times 10^6 \times 10^{18} \text{ mm}^3 = 1386 \times 10^{24} \text{ mm}^3$$

està constituïda per: $\frac{1386 \times 10^{24} \text{ mm}^3}{330 \text{ mm}^3 / \text{gotita}} = 4.2 \times 10^{24}$ gotetes, que equivalen a

una quantitat de $N = 2.1 \times 10^{24}$ gotes, obtingudes cadascuna per la suma de dues gotetes o nombres primers p_i (en el nostre cas).

Així doncs, aquestes gotetes elementals, unides amb altres configurant grups o sumes de 2, constitueixen un conjunt de cardinal: $N = 2.1 \times 10^{24}$ gotes (que assimilarem als nombres parells en número molt gran o *quasi* infinit. Hauria de recordar aquí que, malgrat que hi hagués algunes excepcions k , segons el concepte d'infinit³⁰, també resultaria que: $\infty - k = \infty$).

Aquesta metàfora hídrica superaria abastament en quantitat la comprovació realitzada per potents ordenadors fins la data per a tots els nombres parells tal que $N < 10^{18}$. En efecte:

$$\frac{2.1 \times 10^{24}}{10^{18}} = 2.1 \times 10^6 = 2 \text{ 100 000 vegades major que l'efectuada amb les millors eines digitals actuals.}$$

En qualsevol cas, sobre aquesta metàfora caldria remarcar que es tracta d'un recurs explicatiu que hem cregut escaient i no pas d'un model formal.

³⁰ El primer que hem de tenir clar és que **l'infinit no és un nombre real**, és més aviat... una idea. El concepte d'**infinit** (de símbol: ∞) apareix a diverses branques de la matemàtica, la filosofia i l'astronomia, en referència a una quantitat sense límit o sense final, contraposat al concepte de finitud. En matemàtiques, l'infinit apareix de diverses maneres: en geometria, el punt a l'infinit en geometria projectiva i el punt de fuga en geometria descriptiva; en anàlisi matemàtica, els límits infinits; i en teoria de conjunts com a nombres transfinits referents als cardinals i als números ordinals infinits, que són majors que qualsevol número natural.

b) Podríem establir una altra metàfora basada en el nombre d'estels de l'univers infinit. Si es fa servir la xifra més pessimista d'estrelles de l'univers, s'estima que hi ha uns 10^{25} astres (és a dir, 10 quadrilions). De la mateixa manera, si es fa l'estimació més optimista, sobre els granets de sorra existents a totes les platges i deserts de la Terra, s'arriba fins i tot a xifres molt superiors. Sempre hi podria haver 2 elements (p_1 i p_2) d'aquests conjunts naturals que s'unissin per obtenir una parella N de mida superior. I en ésser infinits, com s'ha vist, els elements (números primers p_i) que es poguessin afegir, també ho serien les seves sumes N (les gotes d'aigua).

Això il·lustraria amb un símil també la conjectura forta o binària de Goldbach, ja que tot número parell N pot perfectament estar format per una parella de nombres primers (p_i, p_j) que se sumen, qüestió que també és possible intuir clarament per inducció completa. Pel que fa a això, cal tenir en compte que, en l'àmbit de la lògica i la filosofia, la inducció és un tipus de raonament que parteix de casos particulars per arribar a una conclusió general. Ara bé, aquesta conclusió no és mai segura ni demostrada, sinó només probable, ja que es basa en l'observació repetida i en la coherència amb les premisses.

És doncs un mètode de coneixement que permet obtenir, per generalització, un enunciat general a partir d'enunciats que descriuen casos particulars. La inducció es considera completa quan s'han observat tots els casos particulars, i aquí ja hem conclòs que és certa la infinitud dels nombres primers (apartat 4 del present treball) i les corresponents agrupacions binàries d'ells, per la qual cosa la generalització a què dona lloc es considera vàlida. En la majoria d'altres casos, però, és impossible assolir una "inducció completa", per la qual cosa l'enunciat general a què es refereix l'aplicació d'aquest mètode quedaria sotmès a un cert grau d'incertesa. Aleshores parlariem d'"inducció incompleta", que no es pot considerar com un esquema d'inferència formalment vàlid, ni es pot justificar empíricament, per la qual cosa ens ofereix "veritats" que gaudeixen d'un major o menor grau de probabilitat, però que no ens poden garantir la seva certesa absoluta.

c) Y ara, com una curiositat geodèsica, que res no té a veure amb els nombres primers que estem tractant, vegem que la longitud del meridià terrestre, tot partint de la clàssica definició del metre (unitat de mesura en el sistema mètric decimal) com la "deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre", suposaria 40000 km, amb la qual cosa:

$$2\pi r = 40000 \text{ km} \Rightarrow r = \frac{40000}{6.2831854} = 6366 \text{ km},$$

malgrat que l'amidament del radi equatorial ofereix un resultat quelcom major (6378 km) i el radi polar quelcom menor (6357 km) tot tenint en compte del lleuger aplatament o el·lipticitat de l'esfera terràquia que es determina per:

$$c = (a - b)/a,$$

on **c** és l'aplatament, **a** l'eix major o equatorial i **b** l'eix menor o polar; és a dir, on $c = (12738 - 12441) / 12738 = 0.023316$, i per tant, resulta: $a - b = 297$ km, que s'expressa abreujadament com 1 : 297.

Simplificativament, la superfície d'aquesta *quasi* esfera terrestre (en realitat es tracta d'un el·lipsoïd de revolució o esferoid), ve donada per:

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \times 6366^2 = 509\,264\,183 \text{ km}^2,$$

la qual cosa implicaria que, de repartir-se tota l'aigua superficial del planeta d'una manera uniforme per tota la superfície planetària, assoliria una alçada mitjana de:

$$h = \frac{1386 \times 10^6 \text{ km}^3}{509\,264\,183 \text{ km}^2} = 2.722 \text{ km} = 2722 \text{ m}.$$

CONCLUSIÓ:

La conjectura forta de Goldbach podria ésser certa, ja que s'acompleix que:

$$\forall N > 2 \Rightarrow N = p_1 + p_2$$

Espero que, tot això, els resulti d'utilitat.

PART III. UNES REFLEXIONS FINALS

I aleshores, què succeeix amb el nombre primer 2? És un nombre enter i parell, però no és la suma de dos nombres primers perquè només es pot formar sumant dos uns, i el nombre 1 no és pas primer. Resultaria doncs que per a aquest nombre la conjectura forta de Goldbach no es compleix. És possible que haguéssim resolt aquí la conjectura forta de Goldbach? Evidentment que no, puix per aquesta raó s'imposa la restricció $\forall N > 2$.

Una altra qüestió que es pot reflexionar és envers la necessitat de plantejar-se i resoldre elucubracions fútils. Per exemple, la següent conjectura de caràcter antropomòrfic: "tots els éssers humans tenen cap sobre les espatlles". *In pure*, podríem no arribar a la demostració definitiva d'aquesta asseveració fins que no hàgim trobat, almenys, una persona escapçada i viva, cosa que refutaria l'anterior afirmació, per la qual cosa es tracta d'anar recorrent el món pacientment fins a trobar-la, o bé no havent trobat tan estrany exemplar humà sobre la faç de la Terra, després d'haver-los confrontat tots, concloure, joiosament, que la conjectura és certa, ja que tots els éssers humans que viuen avui al nostre planeta satisfan l'afirmació.

Se m'acut, en relació a l'exposat al paràgraf anterior, que el cap (part superior del cos humà en què estan situats el cervell i els principals òrgans sensorials) és un òrgan consubstancial amb l'ésser humà, per la qual cosa resulta absolutament precisa la seva presència en aquell, i sense el qual no existeix aquest ésser, per la qual cosa és absurd continuar cercant. En aquest sentit, hi

haurà qui pensi (amb el cap) que seria més útil per a la humanitat que algunes ments ben pensants sobre la matèria dediquessin els seus esforços lloables a crear i/o perfeccionar models matemàtics de predicció del clima, de millora de la salut de les persones, de prospectiva econòmica o d'anàlisi dels moviments migratoris a escala mundial.

Una cosa així es pot comparar amb la cerca afanyosa d'un nombre N , natural i parell, que no es pugui representar com a suma de dos nombres primers, el nombre dels quals, per cert, és infinit. Els nombres primers són elements i part consubstancial (subconjunt) dels nombres naturals i la suma simple de dos d'ells, en ser imparells o senars, sempre oferirà una quantitat parella. Doncs bé, inassequibles al desànim, ja portem comprovats, mitjançant el suport de potents sistemes informàtics, una veritable monstruositat de nombres naturals parells menors que 10^{18} sense detectar cap excepció a la famosa conjectura. I la festa continua.

Sembla una absurditat, doncs, seguir provant estoicament mostres encara més grans, ja que si s'acompleix la conjectura, mai no s'arribaria a trobar la prova negativa de la mateixa tot tenint en compte la infinitud de l'univers a investigar. Malgrat els denudats i ímprobos esforços realitzats fins ara, encara queden infinits números naturals per provar, i els matemàtics sospiten que, per més que cerquin, no trobaran un sol cas en què no es compleixi la conjectura de Goldbach. Sostenen, amb raó, que a mesura que els nombres naturals creixen, també augmenten les maneres en què poden expressar-se a partir dels nombres primers. Per exemple: el 10 es pot fer sumant el 5 amb si mateix o bé el 3 amb el 7. El 100, per exemple, es pot construir de sis formes diferents, i pel que hem vist, el nombre de combinacions possible es dispara a mesura que estudiem números cada cop més grans. Per inducció es podria deduir o intuir-se, doncs, que la conjectura forta de Goldbach és certa.

Es tracta d'un argument força simple: com més gran és un nombre parell N més gran és el nombre de formes en què podem expressar-ho com a suma de dos nombres naturals. Per tant, també és més gran la probabilitat que hi hagi una manera d'escriure'l en què els dos números en qüestió siguin primers, que també són elements de N , ja que $P \subset N$. Possiblement aquesta no sigui útil com a demostració *ad hoc*, però ens pot servir d'idea per enfocar els nostres estudis sobre el tema. En efecte, aquesta conjectura ha estat investigada per molts teòrics de números i ha estat comprovada per ordinadors per a tots els números parells menors que 4×10^{18} . I en el cas concret de la conjectura feble o ternària, amb Helfgott (2013) s'ha assolit la fabulosa xifra de 8.875×10^{30} números naturals rastrejats. No obstant això, per a aquesta conjectura en tenim, ara mateix, una pretesa demostració matemàtica, que encara s'està estudiant per a la seva validació.

En realitat, amb la comprovació computacional actual de la conjectura de Goldbach, s'està fent una anàlisi censal o universal davant de l'anàlisi mostral, és a dir, no s'està emprant la Teoria de la Probabilitat i Estadística per determinar la mida de la mostra. Doncs bé, si en base a criteris de màxima prudència adoptem, "a priori", un nivell de confiança o significació del 99.9% (vegeu Annex d'informació complementària, taula 3) i amb un error mostral

d'estimació màxim permisible de l'1%, amb aquests forts condicionants, la mida de la mostra de nombres naturals a analitzar en la cerca objectiva dels nombres primers pot determinar-se emprant el mostreig aleatori simple³¹ partint de què es tracta d'una població infinita de nombres naturals $n = \infty$, prenent un valor: $z_{\alpha/2} = 3.09$ com a valor de la funció de Gauss acumulativa de la distribució normal per a una determinada probabilitat, cosa que exigiria el recompte d'un nombre de naturals de (grandària necessària de la mostra per tal d'estimar la mitjana poblacional en una població infinita):

$$n' = \frac{z_{\alpha/2}^2 \times \sigma_c^2}{e^2} = \frac{3.09^2 \times 2922.1^2}{0.01^2} \cong 8.15 \times 10^{11},$$

que resulta ser una quantitat enorme d'elements a analitzar però encara així molt inferior a 4×10^{14} (nombres parells menors comprovats per J. Richstein) i també d'exigència molt inferior a la que es ve treballant fins a la data (4×10^{18}), com ja hem posat de manifest ara mateix i en altres apartats del present treball. I, malgrat això, com a prova a favor de la conjectura, segueix sense trobar-se un nombre natural N que no es pugui escriure o expressar com a suma de dos nombres primers. Possiblement, en aquest context seria millor emprar conceptes de la física quàntica que poguessin aportar més llum per a la cerca de nombres primers, malgrat que això també podria comportar embolicar-ho més amb raonaments no matemàtics.

També s'ha demostrat que la conjectura de Goldbach és certa per a gairebé tots els números parells. En aquest context matemàtic, aquesta expressió vol dir que el límit del quocient entre el nombre de parells menors que m per als quals es compleix la conjectura i el nombre de tots els parells menors que m és igual a 1 (quan m tendeix a infinit). Intuïtivament, podríem dir que, per a números parells molt grans, seria raríssim que no es complís la conjectura.

La major part dels matemàtics creuen, doncs, que la conjectura és certa, i es basen majoritàriament en les consideracions estadístiques sobre la distribució probabilística dels nombres primers en el conjunt dels nombres naturals: com més gran sigui el nombre enter parell N , es fa més «probable» que pugui ser escrit com a suma de dos nombres primers. Aquestes consideracions estadístiques presenten evidència informal a favor de la conjectura (tant en la seva forma feble com en la forta) per a nombres enters suficientment grans: com més gran és l'enter, més formes hi ha disponibles d'aquest nombre per ser representat com la suma de dos o tres números, i el més "probable" resulta ser que almenys una d'aquestes representacions consisteixi enterament a partir de nombres primers.

Això queda visible mitjançant la contemplació de la representació gràfica de l'anomenat "cometa de Goldbach":

³¹ El mostreig aleatori simple és una tècnica essencial en la investigació estadística que proporciona una mostra representativa de la població. Consisteix a seleccionar un subconjunt aleatori d'individus de la població objectiu per representar tot el grup. És un procediment de mostreig probabilístic que dona a cada element de la població objectiu i a cada possible mostra d'una mida determinada, la mateixa probabilitat d'ésser seleccionat.

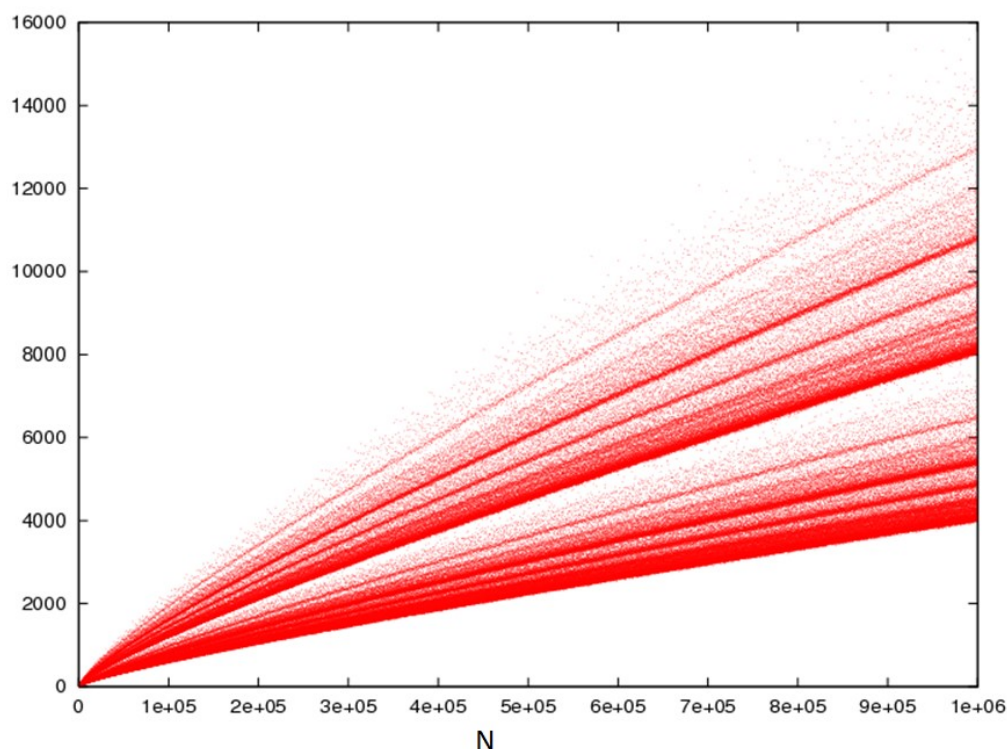


Fig. 14. Diferents maneres d'expressar N natural i parell com a suma de 2 nombres primers ($4 \leq N \leq 10^6$).

I fins aquí les nostres disquisicions sobre les dues conjetures de Goldbach (1690-1764), tant la forta com la feble que hem tractat. Hem partit d'algun plantejament previ per tal d'enfocar el tractament del problema que ens ocupa, acompanyat d'alguna reflexió sobre l'estat de la qüestió i la constatació de la dificultat que han experimentat, al llarg de la història, diferents matemàtics a l'hora d'intentar la seva resolució. Cal diferenciar, al nostre treball, entre l'argumentació lògica-inductiva i la demostració estrictament formal.

Normalment es classifiquen tres tipus de raonament: el lògic, el creatiu i l'heurístic. Aquest darrer fa referència a la modalitat de pensament que cerca la solució als problemes que se li presenten a través de coneixements previs o bé de la pròpia experiència, resolent-los de forma pràctica.

Es coneix com a "heurística" el conjunt de tècniques o mètodes per resoldre un problema. La paraula heurística és d'origen grec, εὕρισκειν, que vol dir "trobar". També s'afirma que l'heurística es basa en l'experiència pròpia de l'individu, i en la dels altres, per trobar la solució més viable al problema plantejat encara que no sigui necessàriament l'òptima. Això ens ha inspirat, sens dubte.

L'heurística també és vista com l'art d'inventar. Consisteix en la cerca d'estratègies, mètodes i criteris que permetin resoldre problemes, a través de la creativitat i el pensament divergent o lateral. En general, es considera que la capacitat heurística és un tret característic dels humans. Així, el seu enfocament no és crear un sistema totalment lògic i òptim per tal de resoldre el problema en qüestió, sinó més aviat proporcionar-li una solució ràpida o immediata d'una manera creativa i intuïtiva.

Actualment, s'han fet adaptacions al terme expressat en diferents àrees. D'aquesta manera, defineixen l'heurística com a art, tècnica o procediment pràctic o informal, per resoldre un problema. Alternativament, Imre Lakatos (1922-1974) la defineix com un conjunt de regles metodològiques no necessàriament forçoses, positives i negatives, que suggereixen o estableixen com cal procedir i quins problemes cal evitar a l'hora de generar solucions i elaborar hipòtesis.

Segons el matemàtic hongarès George Pólya (1887-1985), que per cert va fer contribucions fonamentals en la teoria de nombres i la probabilitat, la base de l'heurística es troba en l'experiència de resoldre problemes i en veure com altres ho fan. Conseqüentment, es diu que hi ha cerques cegues, cerques heurístiques (basades en l'experiència) i cerques racionals.

També hem cregut útil fer una aproximació a l'heurística en l'estudi del problema plantejat. A les ciències computacionals també es parla moltes vegades de processos heurístics o estratègies heurístiques en diferents sentits, encara que en general se l'entén com un procés o regla que permet assolir una solució pràctica, encara que no necessàriament òptima o formal (Romanycia i Pelletier, 1985). A la literatura que versa sobre el raonament heurístic s'ha assumit una distinció contundent i, en força casos, fins i tot una oposició entre el raonament formal i el raonament heurístic. Aquest argument en què la discussió s'ha centrat en quin d'aquests tipus de raonaments ha de marcar la pauta del bon raonament o quin ha de ser considerat com a model del nostre raonar. Kahneman (2002), Gigerenzer (1996) i la tradició d'heurística i biaix assumeixen que el raonament formal ha de ser el cànon del bon raonament, subscriuint allò que es coneix com a “visió estàndard de la racionalitat”; és a dir, les regles derivades dels axiomes de la lògica, el càlcul de probabilitats, l'estadística i les teories formals de la decisió racional.

Hem pretès realitzar, en aquest article, una demostració molt més simple que les empreses fins ara, que fos assequible també per als “no matemàtics”. De fet, si resulta prou fàcil la comprensió de l'enunciat de la conjectura, també podria resultar relativament simple la seva demostració. Però, com sempre, acceptem qualsevol altra opinió que serà, sens dubte, força més autoritzada que la nostra.

Per cert, i amb alguna contraposició a allò expressat en paràgrafs anteriors, a la mateixa carta de Goldbach a Euler, el nostre egregi personatge escriu una reflexió molt interessant i sàvia sobre les matemàtiques en si mateixes, que també voldria aplicar al nostre humil treball:

“No crec que sigui totalment inútil plantejar aquelles proposicions que són molt probables encara que falti una veritable demostració, ja que, encara que es descobreixi que són incorrectes, poden conduir al descobriment d'una nova veritat.”

PART IV. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES I RECOMANACIONS

En qualsevol cas, per tal de saciar la curiositat dels lectors més interessats en el tema, a més de la bibliografia ja citada al mateix cos del treball, són recomanables els següents textos i articles relacionats amb aquesta famosa conjectura matemàtica de Goldbach tal com l'hem exposat aquí. A saber:

- [1] ALCAIDE, A. *Estadística económica*. Ed. SAETA. Madrid, 1973. 370 p. Proporciona un bon recolzament sobre l'estadística descriptiva.
- [2] AMO, E. de, DÍAZ M. i FERNÁNDEZ J. *Demostraciones de la infinidad de los números primos*. Épsilon - Revista de Educación Matemática 2013, Vol. 30(2), nº 84, 69-88. ISSN: 2340-714X.
- [3] BELLMAN, R. *A note on the divergence of a series*. *Amer. Math. Monthly*, 50, 318-319, 1943.
- [4] CAMACHO, J. "Una fórmula que genera números primos". *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, vol. 22, núm. 1, pp. 1-9, 2021. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- [5] CHARLIER, C. V. L. *Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik*. Lund (Suecia), 1931 (versió castellana del Dr. José González Galé, en "Cuadernos de Trabajo del Instituto de Biometría", Buenos Aires, 1936).
- [6] CILLERUELO, J. i CÓRDOBA, A. *La Teoría de los Números*, Mondadori, 1992. Hi ha un capítol dedicat als mètodes de selecció o sedàs on es demostra el teorema de Vigo Brun i el teorema de Schnirelmann.
- [7] CHEN, J.R. «On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes». 1973. *Sci. Sinica* **16**: 157-176.
- [8] CLARKSON, J.A. *On the series of prime reciprocals*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17, 541, 1966.
- [9] DIXON, W.J. i MASSEY, F.J. *Introducción al análisis estadístico*. Ed.: Del Castillo, S.A. Madrid, 1969. 489 p. Proporciona un bon recolzament sobre l'estadística descriptiva.
- [10] DRESSLER, R.E. *A lower bound for $\pi(n)$* . *Amer. Math. Monthly*, 82, 151-152. 1975.
- [11] DUSART, P. *Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers*. Tesi doctoral per a la Universitat de Limoges, 1998.
- [12] DUX, E. *Ein kurzer Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe*. *Elem. Math.*, 11, 50-51, 1956.
- [13] EDWARDS, C. i PENNEY, D. *Cálculo con Geometría Analítica*. México, D.F.: Prentice Hall. 1997.

- [14] ERDÖS, P. *Über die Reihe $\sum 1/p$* . *Mathematica Zutphen B*, **7**, 1-2. 1938.
- [15] EULER, L. *Variae observationes circa series infinites*. 1737. *Comm. Acad. Petropolitanae*, **9**, 160-188.
- [16] FERNÁNDEZ, J., SÁNCHEZ, R. i ÚBEDA, M. "Fórmulas que generan números primos". Universidad de Almería. *Épsilon - Revista de Educación Matemática* 2022, nº 110, 77-101.
- [17] FRANQUET, J.M. *Modelo estadístico de distribución espacial de las acequias en una zona regable*. Ed. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Centre Associat de Tortosa. Colecció Cadup-Estudios, 2019. 146 p. Proporciona un bon recolzament sobre l'estadística descriptiva.
- [18] FREUND, J.E. i WILLIAMS, F.J. *Elementos modernos de estadística empresarial*. Ed. Prentice/Hall International, Inc. London, 1964-1972. 462 p. Proporciona un bon recolzament sobre l'estadística descriptiva.
- [19] FURSTENBERG, H. *On the infinitude of primes*. *Amer. Math. Monthly*, **62**, 353. 1955.
- [20] GIGERENZER, G. "How to make cognitive illusions disappear: Beyond 'heuristics and biases'", *European Review of Social Psychology*, núm. 2, pp. 83-115. 1996.
- [21] GOLDBACH, C. "Letter to Leonhard Euler" (Moscó, 7 de junio de 1742).
- [22] GUY, R. *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1995. Extensa col·lecció de problemes sense resoldre, amb moltes referències.
- [23] HACKS, J. *Über einige für Primzahlen charakteristische Beziehungen*. *Acta Mathematica*, **17**(1), 205. 1983.
- [24] HARDY, G. H. i WRIGHT, E. *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford at the Clarendon Press, 1997. Un clàssic de la Teoria de Números.
- [25] HARRIS, V.C. *Another proof of the infinitude of primes*. *Amer. Math. Monthly*, **63**, 711. 1956.
- [26] HELFGOTT, H.A. «Major arcs for Goldbach's theorem». 2013. [arXiv:1305.2897](https://arxiv.org/abs/1305.2897)
- [27] JONES, J. P.; SATO, D.; WADA, H. i WIENS, D. "Diophantine representation of the set of prime numbers". *American Mathematical Monthly*, **83**(6), 449-464, 1976.
- [28] KAHNEMAN, D. "Prize Lecture: Maps of Bounded Rationality", disponible en: Kahneman, Daniel, 2002, "Prize Lecture: Maps of Bounded Rationality",

disponible en: <http://www.Nobelprize.org> . Nobel Media AB 2013, (consultat 30/I/2014).

[29] LAKATOS, I. *The methodology of scientific research programmes. Philosophical papers* (Volum. 1). Cambridge University Press. New York. 1978. 250 p.

[30] LANDAU, E. *Vorlesungen über Zahlentheorie* (3 volum.). Leipzig: Hirzel. 1927.

[31] LEGENDRE, A.M. *Essai sur la Theorie des Nombres*. Paris: Duprat. 1798.

[32] LITTLEWOOD, J.E. *Distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris 158, pp. 1869-1872, 1914.

[33] MOSER, L. *On the series*. *Amer. Math. Monthly*, 65, 104-105, 1958.

[34] NAIR, M. *On Chebyshev-type inequalities for primes*. *Amer. Math. Monthly*, 89(2), 126-129. 1982.

[35] NATHANSON, M. B. *Additive number theory: The Classical Bases*, Graduate Texts in Mathematics 165, Springer-Verlag, 1996. Un text avançat i ben escrit, que inclou les demostracions del Teorema de Vinogradov i del Teorema de Chen Jing-run.

[36] OWENS, M. "¿Is There a Formula that Generates Prime Generates Prime Numbers?". A Sonoma State Math Colloquium, 2008. Estados Unidos de Norteamérica. Recuperat el 15 de juny de 2020: https://web.sonoma.edu/math/colloq/primes_sonoma_state_9_24_08.pdf.

[37] POLLACK, P. *Not Always Buried Deep. Selections from Analytic and Combinatorial Number Theory*, 2003. Recuperat de la direcció <http://www.princeton.edu/~ppollack/notes/notes.pdf>.

[38] PÓLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning, Volume 1: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press. New Jersey, 1954. 296 p.

[39] PRIETO, C. "Los Números Primos: Hechos y Conjeturas". Segundo Encuentro con los Números. Antioquia, Colombia, 2013. Recuperat el 15 de juny de 2020: <https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/phocadownloadpap/presentaciones/pdf>.

[40] PULIDO, A. *Estadística y técnicas de investigación social*. Ed. Anaya. Madrid, 1971. Proporciona un bon recolzament sobre l'estadística descriptiva.

[41] RAMARÉ, O. «Contribution au problème de Goldbach: tout entier supérieur a 1 est somme d'au plus 13 nombres premiers» / Grenoble : Atelier national de reproduction des thèses, 1991.

- [42] RIBENBOIM, P. *The New Book of Prime Number Records*, 3rd edition Springer-Verlag, New York, 1995. Un llibre de fàcil lectura, molt recomanable.
- [43] RICHSTEIN, J. *Verifying the Goldbach Conjecture up to 4×10^{14}* , Mathematics of Computation, 1998.
- [44] RIEMANN, B. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, pp. 671-680, 1859.
- [45] ROMANYCIA, M. H. i PELLETIER, F.J. "What is a heuristic?", *Computational Intelligence*, núm. 1, pp. 47-58, 1985.
- [46] ROWLAND, E. "A Natural Prime – Generating Recurrence", 2008. Recuperat de ArXiv el 14 de juny de 2020: <https://arxiv.org/abs/0710.3217v3>.
- [47] SPIEGEL, M.R. *Teoría y problemas de probabilidad y estadística*. Ed. Mc Graw-Hill. México, 372 p. 1981. Proporciona un bon recolzament sobre l'estadística descriptiva.
- [48] STURGES, H. "The choice of a class-interval". *Journal of Amer. Statist. Assoc*, 21, pp. 65-66, 1926. Recuperat de: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0073-47212007000200010
- [49] VALLÉE POUSSIN, CH. J. DE LA. «Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers», Ann. Soc. Sci. Bruxelles, vol. 20, pp. 183-256, 281-297, 1896.
- [50] VINOGRADOV, I.M. "Representation of an odd number as a sum of three primes", Dokl. Akad. Nauk. SSR 15, 291–294, 1937.
- [51] WANG, Y. *Goldbach's conjecture World Scientific, Publ.*, Singapore, 1984.
- [52] WUNDERLICH, M. *Another proof of the infinite prime's theorem. Amer. Math. Monthly*, 72, 305. 1965.
- [53] XIAO, K. "The Prime Number Formulas". 2015. Recuperat de ViXra el 15 de juny de 2020: <https://vixra.org/pdf/1501.0129v1.pdf>.

* * * * *

(*) Nota explicativa (p. 8):

Cal tenir en compte que, en aquest cas, amb la parella de nombres primers (p_1, p_2) , tal que: $p_2 = p_1 + 2$, s'acompleix que:

$$A = \sqrt{p_1 p_2 + 1} = \frac{p_1 + p_2}{2}, \text{ amb el seu quadrat es té:}$$

$$A^2 = p_1 p_2 + 1 = p_1(p_1 + 2) + 1 = p_1^2 + 2p_1 + 1 = (p_1 + 1)^2. \text{ Endemés:}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{(p_1 + p_2)^2}{4} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2}{4} = \frac{p_1^2 + (p_1 + 2)^2 + 2p_1(p_1 + 2)}{4} = \\ &= \frac{p_1^2 + p_1^2 + 4 + 4p_1 + 2p_1^2 + 4p_1}{4} = \frac{4p_1^2 + 8p_1 + 4}{4} = p_1^2 + 2p_1 + 1 = (p_1 + 1)^2 \end{aligned}$$

D'on resulta la semisuma: $A = p_1 + 1$.

() Nota explicativa (p. 17):**

γ és la constant d'Euler-Mascheroni. La **constant d'Euler-Mascheroni**, també coneguda com a *constant d'Euler*, que ja hem referit anteriorment, és una constant matemàtica que apareix principalment en la teoria de números, i es denota amb la lletra grega minúscula γ (gamma). Es defineix como el límit de la diferència existent entre la sèrie harmònica i el logaritme natural o neperià, a saber:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right] = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx$$

El seu valor aproximat és:

$$\gamma \approx 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606 \dots$$

Aquesta constant aparegué per primer cop l'any 1734, en un article escrit per Leonhard Euler intitulat *De Progressionibus harmonicis observationes*, tot calculant els 6 primers dígit per a la constant i anomenant-la C. En 1781 calcularia altres 10 decimals més. En 1790, Lorenzo Mascheroni (1750-1800) calcularia els primers 19 decimals i la denotaria com A. Ja més tard es denotaria de la forma moderna com γ , degut a la seva connexió amb la funció gamma.

El número γ no s'ha provat que sigui algebraic o transcendent; de fet, ni tan sols se sap si γ és irracional o no. L'anàlisi de fraccions contínues revela que, de ser racional, el seu denominador ha de ser força gran (actualment de l'ordre de 10^{242080}). Com que es troba present en un gran nombre d'equacions i relacions, la racionalitat o irracionalitat de γ es troba, sens dubte, entre els problemes oberts més importants de les matemàtiques.

SÍMBOLS, ABREVIATURES I SIGLES

%	Percentatge (tant per cent)
...	Punts suspensius (etcètera)
$\uparrow, \downarrow$	Ascendent, descendent
$\rightarrow$	Tendeix a ...
a.C.	Abans de Crist
art.	Article
c	Amplitud de l'interval de classe
C	Mitjana quadràtica, coeficient de contingència
C_{ap}	Coeficient d'apertura
CGPM	Conferència General de Peses i Mesures
Coef.	Coeficient
cos	Cosinus
c.e.v.d.	Como es volia demostrar
CV	Coeficient de variació de Pearson
DM	Desviació mitjana absoluta
Dr.	Doctor
=	Igual a ...
$\neq$	Desigual a ...
e	Base dels logaritmes neperians o naturals, 2.7182818284...
Ed.	Editorial
et alt.	<i>Et altri</i>
etc.	Etcètera
$\approx, \equiv, \cong$	Aproximadament igual, equivalent
$\leq$	Menor o igual
$\geq$	Major o igual
$\exists$	Existeix
$\subset$	Està contingut
$\in$	Pertany
Fig.	Figura
!	Factorial
G	Mitjana geomètrica
g.l.	Graus de llibertat
GNU GPL	<i>General Public License</i>
g_1	Coeficient d'asimetria o biaix (Fisher)
g_2	Coeficient de curtosi (Fisher)
H	Mitjana harmònica
$\Rightarrow$	Implica
∞	Infinit
ICM	<i>International Congress of Mathematicians</i>
I_G	Índex de Gini
IMU	Unió Matemàtica Internacional
k	número d'interval de classe
km	Kilòmetres
L	interval de classe
lim	Límit
ln	Logaritme natural o neperià
log	Logaritme decimal
MQ	Mínim quadràtic
M_e	Mediana

M_{eg}	Mediana de Gastwirth
m_3	Moment d'ordre 3 respecte a la mitjana aritmètica o central
M_3	Mitjana cúbica
m_4	Moment d'ordre 4 respecte a la mitjana aritmètica o central
ml	Mil·lilitres
mm	Mil·límetres
M_o	Moda
n, n'	Grandària mostral
n^o	Número
N	Número parell natural
p. = pàg.	Pàgina
P, Pr	Probabilitat, coeficient d'asimetria o biaix
p_i, p_j	Nombres primers
pp. = pàgs.	Pàgines
$\forall$	Per a tot
Q_1	Primer quartil
Q_2	Segon quartil (Mediana)
Q_3	Tercer quartil
Q_4	Quart quartil
$\mathbb{R}$	Conjunt dels nombres reals
r	Coeficient de correlació lineal
R^2	Recorregut o rang, coeficient de determinació o crític
R'	Recorregut relatiu
Ref.	Referència
RMS	<i>Root mean square</i>
s	Desviació típica mostral
s^2	Variància mostral
sin	Sinus
ss.	Següents
T	Trimèdia (Tukey)
T_1, T_2	Tercils
UNED	Universitat Nacional d'Educació a Distància
V	Coeficient de Cramers
v.gr.	<i>Verbi gratia</i>
x	Abscissa, marca de classe
$\bar{X}$	Mitjana aritmètica
y	Ordenada
Z	Transformació de Fisher

LLETRES GREGUES

α	Esperanza matemàtica (mitjana aritmètica), nivell de significació
χ^2	Distribució i estadígraf Txi-quadrat
π	Irracional 3.1415927...
σ	Desviació típica poblacional
σ^2	Variància poblacional
σ_c	Desviació típica corregida
ϕ	Coeficient de correlació de 4 camps
Σ	Sumatori
Π	Productori o multiplicatori

ANNEX D'INFORMACIÓ COMPLEMENTÀRIA

1. NOMBRES PRIMERS COMPRESOS EN ELS 10000 PRIMERS NÚMEROS NATURALS

1	2 3 5 7 11 13 17 19 23 29
2	31 37 41 43 47 53 59 61 67 71
3	73 79 83 89 97 101 103 107 109 113
4	127 131 137 139 149 151 157 163 167 173
5	179 181 191 193 197 199 211 223 227 229
6	233 239 241 251 257 263 269 271 277 281
7	283 293 307 311 313 317 331 337 347 349
8	353 359 367 373 379 383 389 397 401 409
9	419 421 431 433 439 443 449 457 461 463
10	467 479 487 491 499 503 509 521 523 541
11	547 557 563 569 571 577 587 593 599 601
12	607 613 617 619 631 641 643 647 653 659
13	661 673 677 683 691 701 709 719 727 733
14	739 743 751 757 761 769 773 787 797 809
15	811 821 823 827 829 839 853 857 859 863
16	877 881 883 887 907 911 919 929 937 941
17	947 953 967 971 977 983 991 997 1009 1013
18	1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061 1063 1069
19	1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151
20	1153 1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223
21	1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283 1289 1291
22	1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373
23	1381 1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451
24	1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511
25	1523 1531 1543 1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583
26	1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637 1657
27	1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723 1733
28	1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811
29	1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889
30	1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987
31	1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027 2029 2039 2053
32	2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129
33	2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179 2203 2207 2213

34	2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287
35	2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357
36	2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423
37	2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531
38	2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609	2617
39	2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
40	2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741
41	2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819
42	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
43	2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999
44	3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
45	3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
46	3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257
47	3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331
48	3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
49	3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511
50	3517	3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571
51	3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
52	3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727
53	3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821
54	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
55	3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989
56	4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057
57	4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
58	4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231
59	4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289	4297
60	4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
61	4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493
62	4507	4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583
63	4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
64	4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751
65	4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831
66	4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937
67	4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003
68	5009	5011	5021	5023	5039	5051	5059	5077	5081	5087
69	5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171	5179
70	5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279
71	5281	5297	5303	5309	5323	5333	5347	5351	5381	5387
72	5393	5399	5407	5413	5417	5419	5431	5437	5441	5443
73	5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507	5519	5521

74	5527	5531	5557	5563	5569	5573	5581	5591	5623	5639
75	5641	5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693
76	5701	5711	5717	5737	5741	5743	5749	5779	5783	5791
77	5801	5807	5813	5821	5827	5839	5843	5849	5851	5857
78	5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
79	5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053
80	6067	6073	6079	6089	6091	6101	6113	6121	6131	6133
81	6143	6151	6163	6173	6197	6199	6203	6211	6217	6221
82	6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299	6301
83	6311	6317	6323	6329	6337	6343	6353	6359	6361	6367
84	6373	6379	6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473
85	6481	6491	6521	6529	6547	6551	6553	6563	6569	6571
86	6577	6581	6599	6607	6619	6637	6653	6659	6661	6673
87	6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761
88	6763	6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833
89	6841	6857	6863	6869	6871	6883	6899	6907	6911	6917
90	6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977	6983	6991	6997
91	7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103
92	7109	7121	7127	7129	7151	7159	7177	7187	7193	7207
93	7211	7213	7219	7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297
94	7307	7309	7321	7331	7333	7349	7351	7369	7393	7411
95	7417	7433	7451	7457	7459	7477	7481	7487	7489	7499
96	7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561
97	7573	7577	7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643
98	7649	7669	7673	7681	7687	7691	7699	7703	7717	7723
99	7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817	7823	7829
100	7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919
101	7927	7933	7937	7949	7951	7963	7993	8009	8011	8017
102	8039	8053	8059	8069	8081	8087	8089	8093	8101	8111
103	8117	8123	8147	8161	8167	8171	8179	8191	8209	8219
104	8221	8231	8233	8237	8243	8263	8269	8273	8287	8291
105	8293	8297	8311	8317	8329	8353	8363	8369	8377	8387
106	8389	8419	8423	8429	8431	8443	8447	8461	8467	8501
107	8513	8521	8527	8537	8539	8543	8563	8573	8581	8597
108	8599	8609	8623	8627	8629	8641	8647	8663	8669	8677
109	8681	8689	8693	8699	8707	8713	8719	8731	8737	8741
110	8747	8753	8761	8779	8783	8803	8807	8819	8821	8831
111	8837	8839	8849	8861	8863	8867	8887	8893	8923	8929
112	8933	8941	8951	8963	8969	8971	8999	9001	9007	9011
113	9013	9029	9041	9043	9049	9059	9067	9091	9103	9109

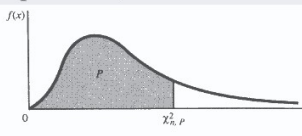
114	9127 9133 9137 9151 9157 9161 9173 9181 9187 9199
115	9203 9209 9221 9227 9239 9241 9257 9277 9281 9283
116	9293 9311 9319 9323 9337 9341 9343 9349 9371 9377
117	9391 9397 9403 9413 9419 9421 9431 9433 9437 9439
118	9461 9463 9467 9473 9479 9491 9497 9511 9521 9533
119	9539 9547 9551 9587 9601 9613 9619 9623 9629 9631
120	9643 9649 9661 9677 9679 9689 9697 9719 9721 9733
121	9739 9743 9749 9767 9769 9781 9787 9791 9803 9811
122	9817 9829 9833 9839 9851 9857 9859 9871 9883 9887
123	9901 9907 9923 9929 9931 9941 9949 9967 9973

FONT: www.vaxasoftware.com

NOTA: Els quartils (Q_0 , Q_1 , $Q_2 = Me$, Q_3 , Q_4) s'han assenyalat en color vermell, i els tercils (T_1 , T_2) en color blau.

2. PERCENTILS DE LA DISTRIBUCIÓ χ^2 DE PEARSON

Esta tabla proporciona los valores $\chi^2_{n,p}$, tales que

$$P = P(X \leq \chi^2_{n,p}) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi^2_{n,p}} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx$$


$n \backslash P$	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,32	2,70	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	2,77	4,60	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	5,38	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96	26,12
9	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26
12	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,32
21	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48
28	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
40	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
50	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66
60	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61
70	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42	104,21	112,29
80	88,13	96,58	101,87	106,62	112,32	116,32	124,77
90	98,65	107,56	113,14	118,13	124,11	128,29	137,20
100	109,09	118,49	124,34	129,56	135,80	140,16	149,38

NOTA: Per a valors grans dels graus de llibertat es pot utilitzar la fórmula aproximada:

$$\chi^2_{\alpha} = n \left(1 - \frac{2}{9n} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{9n}} \right)^3,$$

essent Z_{α} la desviació normal i n el número de graus de llibertat. Així, v. gr.:

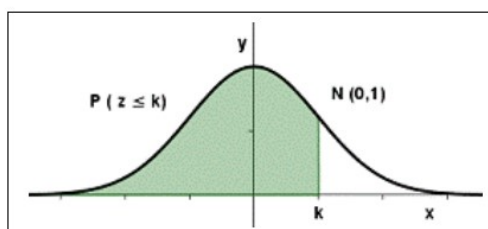
$$\chi^2_{99} = 60 \cdot \left(1 - 0,00370 + 2,326 \cdot 0,06086 \right)^3 = 60 \cdot (1,1379)^3 = 88,4,$$

per al percentil 99 amb 60 graus de llibertat (Dixon i Massey, 1969).

De la mateixa manera, es tindria que per al percentil 99 amb 36 g.l.: $\chi^2_{99} = 54,324$.

3. DISTRIBUCIÓ NORMAL TIPIFICADA $N(0,1)$

Els valors de la taula normal representen l'àrea sota la corba normal fins un valor positiu de z .



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

RELACIÓ DE FIGURES

- Fig. 1. Ampliacions successives del concepte de número.
- Fig. 2. Histograma de rectangles juxtaposats (1-1000).
- Fig. 3. Diagrama acumulatiu ascendent (1-1000).
- Fig. 4. Diagrama acumulatiu ascendent (1-10000).
- Fig. 5. Histograma de rectangles juxtaposats (1-10000).
- Fig. 6. Distribució i valor dels quantils (1-10000).
- Fig. 7. Coordenades cartesianes rectangulars de les variables p i q .
- Fig. 8. Índex de Gini i corba de Lorenz.
- Fig. 9. Nombres primers continguts en els primers 10^8 números naturals.
- Fig. 10. Polinomi d'Euler generador de nombres primers.
- Fig. 11. Construcció geomètrica de les quatre mitjanes emprades.
- Fig. 12. Construcció geomètrica de la conjectura ternària de Goldbach (I).
- Fig. 13. Construcció geomètrica de la conjectura ternària de Goldbach (II).
- Fig. 14. Diferents maneres d'expressar N natural i parell com a suma de 2 nombres primers ($4 \leq N \leq 10^6$).

RELACIÓ DE TAULES

- Taula 1. Nombres primers bessons dels primers 200 naturals.
- Taula 2. Nombres primers (1 a 200).
- Taula 3. Formació de números parells naturals N per adició de 2 nombres primers (1 a 200).
- Taula 4. Distribució dels nombres primers continguts en els 1000 primers números naturals.
- Taula 5. Distribució dels nombres primers continguts en els 10000 primers números naturals.
- Taula 6. Comprovació de Charlier.
- Taula 7. Taula de càlculs auxiliars (1-10000).
- Taula 8. Auxiliar de càlcul de l'índex de Gini.
- Taula 9. Auxiliar de càlcul de l'estadígraf χ^2 (1-10000).
- Tabla 10. Característiques de la distribució dels nombres primers (de l'1 al 10000).
- Taula 11. Generació de nombres primers per a $0 \leq n \leq 39$.
- Taula 12. Formació de números parells naturals N per la resta de 2 nombres primers (1 a 200).
- Taula 13. Distàncies existents entre 2 nombres primers consecutius (1 a 200).



ÍNDEX ONOMÀSTIC D'AUTORS

ALCAIDE, A.: 25, 36, 71.

AMO, E. DE.: 11, 12, 18, 71.

AURIC: 11.

AVOGADRO, A.: 15.

BELLMAN, R.: 18, 71.

BERNOULLI, D.: 10, 11, 42.

BOWLEY, A. L.: 35.

BRAUN: 11.

CAMACHO, J.: 51, 71.

CANTOR, G.: 59.

CAUCHY, A. L.: 16, 18.

CHARLIER, C.: 32, 33, 71, 84.

CHASLES, M. F.: 10.

CHEN, J.R.: 46, 54, 71, 73.

CILLERUELO, J.: 46, 71.

CLARKSON, J. A.: 18, 71.

CÓRDOBA, A.: 71.

COTES, R.: 11.

D'ALEMBERT, J. R.: 16.

DEDEKIND, R.: 59.

DESCARTES, R.: 9.

DESHOILLERS, J. M.: 46.

DÍAZ, M.: 71.

DIRICHLET, P. G. L.: 51.

DIXON, W. J.: 33, 71, 82.

DRESSLER, R. E.: 11, 71.

DUSART, P.: 18, 71.

DUX, E.: 18, 71.

EDWARDS, C.: 18, 72.

EFFINGER, G.: 46.

EINSTEIN, A.: 13.

ENRÍQUEZ VANDERKAN, A. A.: 4, 7.

ERDÖS, P.: 18, 72.

EUCLIDES: 4, 11, 13.

EULER, L.: 1, 11, 12, 14, 17, 18, 48, 49, 51, 55, 70, 72, 75, 84.

FERMAT, P.: 12.

FERNÁNDEZ, J.: 71, 72.

FEYNMAN, R.: 11.

FIBONACCI, L.: 12.

FISHER, R.: 36, 37, 40, 76, 77.

FRANQUET, J. M.: 2, 30, 72.
FREUND, J. E.: 27, 72.
FURSTENBERG, H.: 72.

GASTWIRTH, J. L.: 30, 77.
GAUSS, K. F.: 4, 10, 11, 16, 36, 37, 68.
GERGONNE, J. D.: 10.
GIGERENZER, G.: 70, 72.
GINI, C.: 37, 38, 76, 84.
GOLDBACH, C.: 1, 2, 3, 4, 10, 11, 24, 49, 53, 54, 56, 58, 60, 61, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 84.
GUY, R.: 72.

HACKS, J.: 11, 72.
HARDY, G. H.: 54, 72.
HARRIS, V. C.: 11, 72.
HELFGOTT, H. A.: 4, 10, 54, 61, 67, 72.
HILBERT, D.: 4, 7.

KAHNEMAN, D.: 70, 73.
KUMMER, E. E.: 11.

LAKATOS, I.: 70, 73.
LANDAU, E.: 4, 73.
LAPLACE, P. S.: 15.
LEGENDRE, A.M.: 5, 12, 14, 49, 73.
LEMKE OLIVIER, R.: 40.
LITTLEWOOD, J.E.: 54, 73.
LORENZ, M. O.: 37, 38, 39, 40, 84.

MASCHERONI: 17, 75.
MASSEY, F.J.: 33, 71, 82.
MATIYASÉVICH, Y. V.: 51.
MCLAURIN, C.: 18.
METROD: 11.
MIXON: 18
MÖBIUS, A. F.: 10.
MOSER, L.: 18, 73.
MULLIN: 13.

NAIR, M.: 11, 73.
NATHANSON, M. B.: 73.
NEPER, J.: 5.

OLIVIER.: 55.
ORESME, N.: 18.
OWENS, M.: 46, 73.

PACIOLI, L.: 6.
PEARSON, K.: 2, 22, 25, 32, 33, 35, 40, 42, 45, 58, 76, 82.
PELLETIER, F.J.: 70, 74.
PENNEY, D.: 18, 72.
PERROT, J.: 11.
PINASCO: 18.
PLÜCKER, J.: 10.
POLLACK, P.: 11, 73.
PÓLYA, G.: 11, 70, 73.
PONCELET, J. V.: 10.
PRIETO, C.: 46, 73.
PRINGSHEIM, A.: 16, 19.
PUISEUX: 17.
PULIDO, A.: 38, 73.

RAABE, J. L.: 16.
RAMARÉ, O.: 73.
RIBENBOIM, P.: 46, 74.
RICHSTEIN, J.: 10, 68, 74.
RIELE, H.: 46.
RIEMANN, B.: 11, 12, 46, 74.
ROLF: 16.
ROMANYCIA, M. H.: 70, 74.
ROWLAND, E.: 46, 74.

SACKS, R.: 48.
SHEPPARD, W. F.: 32, 37.
SOUNDARARAJAN, K.: 40.
SPIEGEL, M. R.: 42, 74.
STIELTJES, T. J.: 11.
STIRLING, J.: 12, 13, 15, 16, 17.
STOLZ, O.: 16.
STURGES, H.: 23, 74.
SYLVESTER, J. J.: 13.

THUE: 11.
TURING, A.: 47.

ULAM, S. M.: 48.

VALLÉE POUSSIN, CH. J. DE LA.: 74.
VINOGRADOV, I.M.: 54, 73, 74.

WANG, Y.: 46, 54, 74.
WILLIAMS, F.J.: 27, 72.
WILLIAMSON: 40.
WRIGHT, E.: 54, 72.
WUNDERLICH, M.: 11, 74.

XIAO, K.: 46, 74.

YATES, F.: 41.

YULE, G. U.: 25, 26, 35.

ZINOVIV, D.: 46.